三重周期極小曲面の周期性の崩壊とラメラ構造について

Collapsing of triply periodic minimal surfaces and lamellar structure

庄田　敏宏 *

佐賀大学　文化教育学部 †

$\mathbb{R}^3$ 内の三重周期極小曲面はソフトマターの膜を形成するといわれており，物理，化学，結晶学などの幅広い分野で研究されている．三重周期の膜の温度を変化させると，平面が周期的に広がるラメラという膜に変異する．

一方，数学において，$\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面，一重周期極小曲面，二重周期極小曲面，三重周期極小曲面が定式化されており，それぞれの極小曲面に対して様々な変形族が構成されている．今回，一重周期極小曲面や二重周期極小曲面のよく知られた変形族が三重周期極小曲面の変形族を退化させることによって得られるという，上述のラメラ構造の出現に類似する結果を得た [1]．本稿ではその詳細を紹介したい．

1　周期的極小曲面

極小曲面 $f:\tilde{M}\to\mathbb{R}^3$ が以下の二つを満たすとき**周期的である**という：(i) その極小曲面が連結である；(ii) $\mathbb{R}^3$ の等長変換による群で $\mathbb{R}^3$ に真性不連続かつ自由に作用するもの G によって $f(\tilde{M})$ が不変である．このとき，G は $\tilde{M}$ に真性不連続かつ自由に作用するため，$M:=\tilde{M}/G$ は多様体になり，極小曲面 $f:M\to\mathbb{R}^3/G$ が誘導される．コンパクト集合の原像がコンパクトになるような写像を**固有写像**というが，本研究の対象は固有な周期的極小曲面である．特に，G が $\mathbb{R}^3$ の離散部分群であるときを取り扱う．なお，本講演では $\tilde{M}$ や M は向き付け可能とする．

G を $\mathbb{R}^3$ の離散部分群とすると，適切な $u_1,\ldots,u_d\in\mathbb{R}^3$ が存在して $G=\{m_1u_1+\ldots+m_du_d\,|\,m_j\in\mathbb{Z}\}$ となる ([9] の p.212 を参照のこと)．$d=0$ の

---

*本研究内容は名城大学の江尻典雄氏，岡山大学の藤森祥一氏との共同研究に基づくものである．

†本研究は科学研究費補助金 (若手 B) 課題番号 24740047 「周期的極小曲面の微分幾何学的モジュライ理論の研究」による援助を受けている．

ときは $G=\emptyset$ と約束する．これらは $\mathbb{R}^3$ に等長変換 (特に平行移動) として真性不連続かつ自由に作用し，$\mathbb{R}^3/G=\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^{3-d}$ となる．ここで，$\mathbb{T}^d$ は d 次元の平坦トーラスとする．以後，G は $\mathbb{R}^3$ の離散部分群として，極小はめ込み $f:\tilde{M}\to\mathbb{R}^3$ が G によって周期的であるとする．$d=0$ のときが通常の $\mathbb{R}^3$ 内の極小曲面である．$d=1$ のときを**一重周期極小曲面**，$d=2$ のときを**二重周期極小曲面**，$d=3$ のときを**三重周期極小曲面**という．

次に，極小はめ込み $f:M\to\mathbb{R}^3/G$ に対する表現公式を与える．M には誘導計量に適合する等温座標によって Riemann 面の構造を入れる．このときの f を**共形極小はめ込み**という．

定理 1.1 (Enneper-Weierstrass の表現公式)**.** 共形極小はめ込み $f:M\to\mathbb{R}^3/G$ は平行移動は無視をして次で与えられる．

$$f(p)=\Re\int_{p_0}^{p}(\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3)^t \mod G, \tag{1}$$

ここで，p_0 は M の定点，t は転置行列を意味し，$\{\omega_j\}$ は互いに共通ゼロ点をもたず，かつ，以下を満たす M 上の正則微分である：

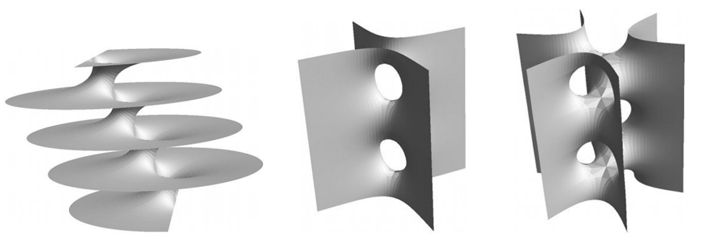
$$\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=0, \tag{2}$$

$$\left\{\Re\int_\gamma(\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3)^t \mid \gamma\in\pi_1(M)\right\}\subset G. \tag{3}$$

逆に，(2) と (3) を満たす (1) は共形極小はめ込み $f:M\to\mathbb{R}^3/G$ を定義する．

2　固有に埋め込まれた周期的極小曲面について

以下では固有な共形極小埋め込み $f:M\to\mathbb{R}^3/G$ に対する先行研究を紹介する．まずは一重周期極小曲面について述べる．有名どころでは以下のような具体例が知られている．



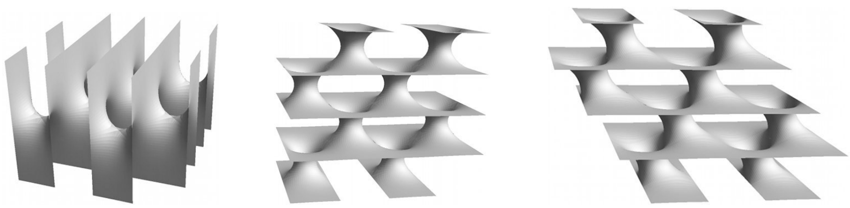
Riemann の極小曲面　　Scherk 曲面　　Karcher のタワー

なお，これらは以下の特徴付けが知られている．ここで，曲面が**有限位相 (finite topology)** であるとは，コンパクトな曲面から有限個の点を除いたものに位相同型であることをいう．

定理 2.1.
(1) (Pérez, Traizet [5]) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$ 内に固有に埋め込まれた平面でない極小曲面で，種数が 0 であり，かつ，有限位相であるようなものは helicoid，Scherk 曲面，Karcher のタワーのみである．特に，Scherk 型のエンドをもつものは後半の二つのみである．
(2) (Meeks, Pérez, Ros [6]) $\mathbb{R}^3$ 内に固有に埋め込まれた極小曲面で，種数が 0 であり，かつ，無限対称群をもつものは平面，catenoid，helicoid，Riemann の極小曲面のみである．
(3) (Meeks, Pérez, Ros [6]) $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$ 内に固有に埋め込まれた周期的極小曲面で，種数が 1 であり，かつ，有限個の平坦エンドをもつものは Riemann の極小曲面のみである．

注意 1. Riemann の極小曲面は $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$ で考えると種数が 1 となる．上の定理では種数が 0 としているが，これは普遍被覆面の種数を主張している．

次に二重周期極小曲面についてを述べる．有名な例としては以下が知られている．



Scherk 曲面　　troidal half plane layer　　Rodríguez の標準例

定理 2.2 (Holly, Meeks [4])**.** $\mathbb{R}^3$ 内に固有に埋め込まれた二重周期極小曲面で，$\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ で考えたら種数が 0 となるようなものは Scherk 曲面のみである．

この結果から，種数が 0 の場合の分類は完全に終わっている．必然的に種数が 1 の場合に興味をもつが，Karcher [3] が 1988 年に上の troidal half plane layer を構成した．対称性が高い曲面ということもあり，troidal half plane layer の変形族を Karcher 自身が二種類，構成している．これらをすべて含んだ 3 パラメーター変形族が Rodríguez [8] の標準例である．

定理 2.3 (Pérez, Rodríguez, Traizet [7])**.** $\mathbb{R}^3$ 内に固有に埋め込まれた二重周期極小曲面で，$\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ で考えたら種数が 1 となり，かつ，エンドがすべて平行であるようなものは Rodríguez の標準例のみである．

以上，種数が低い場合には，$\mathbb{R}^3$ 内に固有に埋め込まれた周期的極小曲面はいくつかの分類がなされている．

3　三重周期極小曲面の極限

本節では前節で紹介した，特徴付けの知られている一重周期極小曲面や二重周期極小曲面に収束するような三重周期極小曲面を考察する．なお，固有な三重周期極小曲面は平坦トーラス内のコンパクトな極小曲面に対応する．

3.1　Rodríguez の標準例に収束する三重周期極小曲面

定理 2.3 から Rodríguez の標準例には特徴付けが知られている．本部分節ではこれに収束するような三重周期極小曲面を考察する．

まず Rodríguez の標準例の詳細を述べる．$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ に対して $\lambda = \lambda(\theta) = \cot\frac{\theta}{2}$ とおく．このとき，種数 1 の Riemann 面を

$$w^2 = (z^2 + \lambda^2)(z^2 + \lambda^{-2}) \tag{4}$$

により定める．

$$\sigma = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \delta = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

として

$$g(z) = \frac{\sigma z + \delta}{i(\overline{\sigma} - \overline{\delta} z)}$$

とする．また，$0 < m < 1$ に対して第一種完備楕円積分

$$\kappa(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - m\sin^2 u}}$$

をとる．このとき，(4) で定義される Riemann 面からの極小埋め込み

$$\frac{\pi\csc\theta}{\kappa(\sin^2\theta)} \Re \int_{p_0}^{p} (1-g^2,\, i(1+g^2),\, 2g)^t \frac{dz}{gw}$$

を $M_{\theta,\alpha,\beta}$ で表す．この曲面およびその被覆曲面を合わせて **Rodríguez の標準例**という．

次にこれに収束する三重周期極小曲面の族を考える．1990 年，Meeks [2] によって種数 3 の超楕円型曲線の族 (実次元 5 である) が構成されている．この族に属する超楕円型曲線は 3 次元平坦トーラス内の埋め込まれた極小曲面として実現され，しかも共役曲面が常に存在する．また，その球面への分岐二重被覆の分岐点は四組の対蹠点で構成される．その詳細を以下に述べる．各 a_i を相異なる 0 でない複素数で $a_1a_2a_3a_4 > 0$ を満たすものとする．このとき，

$$w^2 = \prod_{i=1}^{4}(z - a_i)\left(z + \frac{1}{\overline{a_i}}\right)$$

で定義される種数 3 の超楕円型曲線において，

$$\Re\int_{p_0}^{p}(\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3)^t,\quad \Re\int_{p_0}^{p}i(\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3)^t$$

により二つの極小埋め込みが与えられる．この三重周期極小曲面の族を **Meeks 族**という．既知の三重周期極小曲面の族は Meeks 族に含まれているものが多い．例えば，tP 族，tD 族，tCLP 族，rPD 族などである．

主結果． Rodríguez の標準例は Meeks 族の極限として実現される．

ここで，主結果を Mathematica によって可視化する．そのために，CLP 曲面を含む Meeks 族に属する以下の変形族を考察し，CLP 曲面から標準例が現れる過程および標準例から Riemann の極小曲面が現れる過程を見る．

三つの実数 k，l，λ に対して，M を

$$w^2 = z(z-k)(z-l)(z-\lambda)\left(z+\frac{1}{k}\right)\left(z+\frac{1}{l}\right)\left(z+\frac{1}{\lambda}\right) \tag{5}$$

で定義される種数 3 の超楕円型曲線とし，

$$f(p) = \Re\int_{p_0}^{p}(1-z^2,\,i(1+z^2),\,2z)^t\frac{dz}{w} \tag{6}$$

で定められる M 上の共形極小埋め込み f を考える．これは Meeks 族に属する．

(5) において，$l \to k$ とすると，M は $w^2 = z(z-k)^2(z-\lambda)\left(z+\frac{1}{k}\right)^2\left(z+\frac{1}{\lambda}\right)$ となる．これは $w = (z-k)\left(z+\frac{1}{k}\right)v$ なる変数変換によって，$v^2 = z(z-\lambda)\left(z+\frac{1}{\lambda}\right)$ なるトーラス T となる．これに応じて，(6) の実部をはずしたものは

$$f_T(p) = \int_{p_0}^{p}(1-z^2,\,i(1+z^2),\,2z)^t\frac{dz}{(z-k)\left(z+\frac{1}{k}\right)v}$$

となる．$\Re f_T$ および $\Im f_T$ が Rodríguez の標準例となる．

CLP 曲面 ($(k,\,l,\,\lambda) = (\sqrt{2}-1,\,1,\,\sqrt{2}+1)$) から始まって，$l \to k$ とした様子を見るために

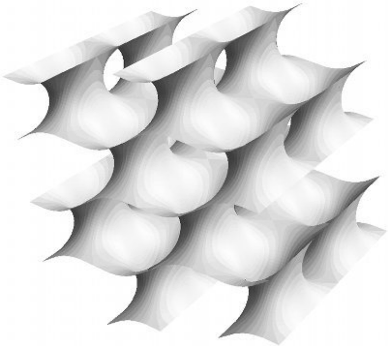
(i) $(k,\,l,\,\lambda) = (\sqrt{2}-1,\,0.6,\,\sqrt{2}+1)$,

(ii) $(k,\,l,\,\lambda) = (\sqrt{2}-1,\,0.42,\,\sqrt{2}+1)$

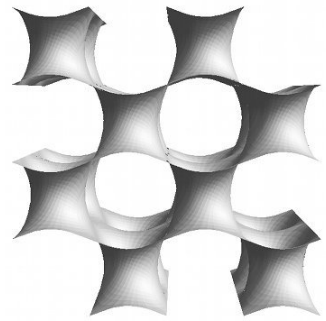
の場合の全体図と正面図，そして

$(k,\,l,\,\lambda) = (\sqrt{2}-1,\,\sqrt{2}-1,\,\sqrt{2}+1)$

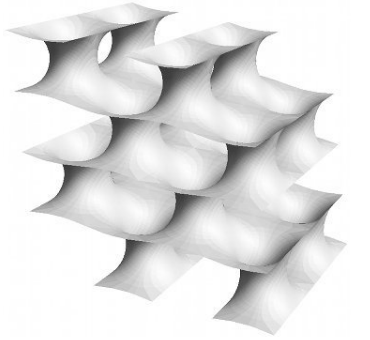
の場合の Rodríguez の標準例を描いたグラフィックスを次で与える．ここでは $\Re f_T$ のみを取り扱うが，$\Im f_T$ も似たグラフィックスになるので省略する．



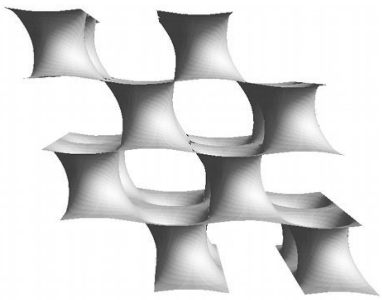
CLP 曲面 (全体図)



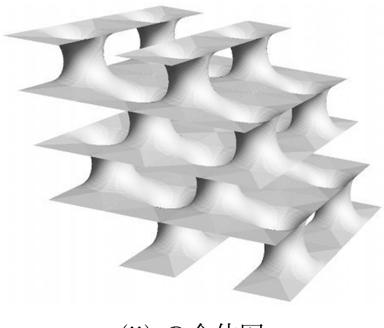
CLP 曲面 (正面図)



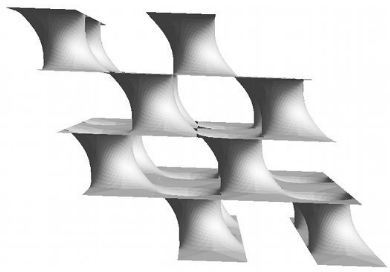
(i) の全体図



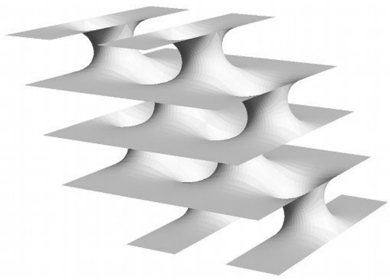
(i) の正面図



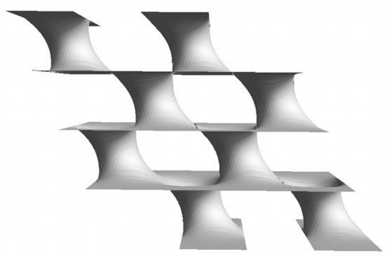
(ii) の全体図



(ii) の正面図



standard example の全体図

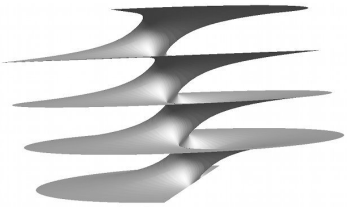


standard example の正面図

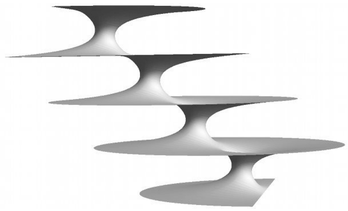
さらに，$k \to 0$ とした場合を考える．f_T を $1/k$ 倍すると

$$
\begin{aligned}
f_k : T &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
p &\longmapsto \int_{p_0}^{p} (1-z^2,\, i(1+z^2),\, 2z)^t \frac{dz}{(z-k)\,(kz+1)\,v}
\end{aligned}
$$

となる．$k=0$ とすると，$\Re f_0$ および $\Im f_0$ は Riemann の極小曲面になる．

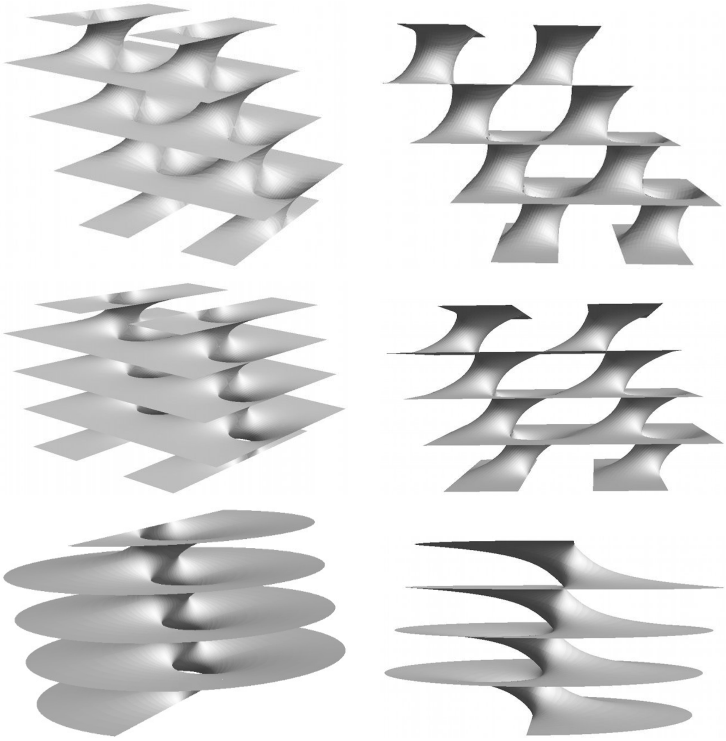


$\Re f_0$ with $\lambda = \sqrt{2}+1$



$\Im f_0$ with $\lambda = \sqrt{2}+1$

Rodríguez 標準例において，$k \to 0$ としたときの変化を見るために，$(k,\, \lambda) = (\sqrt{2}-1,\, \sqrt{2}+1),\, (0.2,\, \sqrt{2}+1)$ の場合の $\Re f_0$ の全体図と正面図を描いたのが次図である．



3.2　Karcher のタワーに収束する三重周期極小曲面

定理 2.1 から，$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^1$ 内に固有に埋め込まれた平面でない極小曲面で，種数が 0 であり，かつ，六つの Scherk 型のエンドをもつものは Karcher のタワーのみである．本部分節ではこれに収束するような三重周期極小曲面を考察する．

まずは Karcher のタワーの詳細を述べる．これは偶数個の Scherk 型エンドをもつが，今回はエンドが六つの場合を取り扱う．球面から -1 の六乗根を抜いた Riemann 面上で

$$\mathrm{Re}\int_{p_0}^{p}(1-z^4,\, i(1+z^4),\, 2z^2)^t\frac{dz}{1+z^6}$$

にて定義される極小埋め込みを **Karcher のタワー**という．これは六つの Scherk 型エンドをもつ一重周期極小曲面である．

次にこれに収束する三重周期極小曲面を考える．$0<a<1$ に対して M を

$$w^2 = z(z^3-a^3)\left(z^3-\frac{1}{a^3}\right)$$

で定義される種数 3 の超楕円型曲線とする．このとき，

$$\mathrm{Re}\int_{p_0}^{p} i(1-z^2,\, i(1+z^2),\, 2z)^t\frac{dz}{w}$$

で定まる M による極小曲面が **Schwarz の H 族**といわれている三重周期極小曲面である．また，$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ に対して M を

$$\begin{aligned} w^2 &= z(z-e^{i\theta})(z-e^{-i\theta})(z-e^{i(\theta+\frac{2\pi}{3})})(z-e^{-i(\theta+\frac{2\pi}{3})})\\ &\quad\times(z-e^{i(\theta+\frac{4\pi}{3})})(z-e^{-i(\theta+\frac{4\pi}{3})})\\ &= z(z^6-2\cos 3\theta z^3+1) \end{aligned}$$

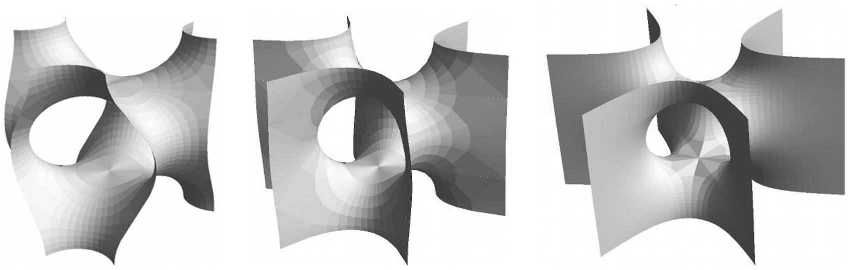
で定義される種数 3 の超楕円型曲線とする．このとき，

$$\mathrm{Re}\int_{p_0}^{p}(1-z^2,\, i(1+z^2),\, 2z)^t\frac{dz}{w}$$

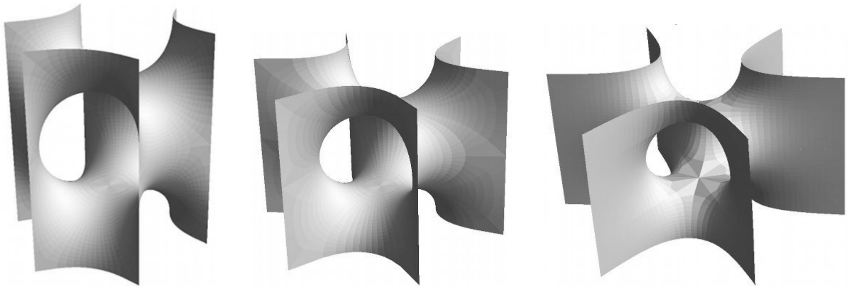
で定まる M による極小曲面が **hCLP 族**といわれているものである．$\theta=\pi/6$ のときが rPD 族といわれる Meeks 族に含まれる極小曲面の随伴曲面になる．

主結果． Karcher のタワーおよびその共役曲面は H 族や hCLP 族の極限として実現される．

下図はこの結果の可視化である．H 族において $a\to 1$ としたときと hCLP 族において $\theta\to\pi/3$ としたときの動きである．



H 族 $(a = 0.5)$ H 族 $(a = 0.9)$ Karcher のタワー



hCLP 族 $(\theta = \pi/6)$ hCLP 族 $(\theta = 7\pi/24)$ Karcher のタワー

参考文献

[1] N. Ejiri, S. Fujimori, and T. Shoda, *A remark on limits of triply periodic minimal surfaces of genus* 3, to appear in Topology and its applications.

[2] W. H. Meeks III, *The Theory of Triply Periodic Minimal Surfaces*, Indiana U. Math. J. Vol. 39, No. 3 (1990), 877–936.

[3] H. Karcher, *Embedded minimal surfaces derived from Scherk's examples*, Manuscripta Math. 62 (1988), 83–114.

[4] H. Lazard-Holly and W. H. Meeks III, *Classification of doubly-periodic minimal surfaces of genus zero*, Invent. math. 143 (2001), 1–27.

[5] J. Pérez and M. Traizet, *The classification of singly periodic minimal surfaces with genus zero and Scherk-type ends*, Transactions of the American Mathematical Society 359, Number 3 (2007), 965–990.

[6] W. H. Meeks III, J. Pérez, and A. Ros, *Uniqueness of the Riemann minimal examples*, Invent. math. 131 (1998), 107–132.

[7] J. Pérez, M. M. Rodríguez, and M. Traizet, *The classification of doubly periodic minimal tori with parallel ends*, J. Differential Geometry 69 (2005), 523–577.

[8] M. Magdalena Rodríguez, *The Space of Doubly Periodic Minimal Tori with Parallel Ends: Standard Examples*, Michigan Math. J. 55 (2007), 103–122.

[9] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.