フェイズフィールド法による体積保存平均曲率流の弱解について

高棹圭介
東京大学 大学院 数理科学研究科

1. Introduction

任意の $t \in [0,T)$ に対し、$U_t \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とし、滑らかな境界 M_t を持つとする。 超曲面の族 $\{M_t\}_{t\in[0,T)}$ が体積保存平均曲率流であるとは、M_t の速度 v が

$$v = H - \langle H \rangle \quad \text{on } M_t, \tag{1.1}$$

を満たすことである。ここで H は M_t の平均曲率、$\langle H \rangle$ は H の積分平均、即ち

$$\langle H \rangle := \frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(M_t)} \int_{M_t} H \, d\mathcal{H}^{d-1}$$

である。ここで $\mathcal{H}^{d-1}$ は $(d-1)$-次元 Hausdorff measure である。 (1.1) により、M_t は体積保存条件、即ち

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}^d(U_t) = -\int_{M_t} v \, d\mathcal{H}^{d-1} = 0 \tag{1.2}$$

を満たす。ここで $\mathcal{L}^d$ は d-次元 Lebesgue measure である。(1.2) により、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{H}^{d-1}(M_t) &= -\int_{M_t} Hv \, d\mathcal{H}^{d-1} = -\int_{M_t} (v + \langle H \rangle) v \, d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= -\int_{M_t} v^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} - \langle H \rangle \int_{M_t} v \, d\mathcal{H}^{d-1} = -\int_{M_t} v^2 \, d\mathcal{H}^{d-1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

を得る。

次に、フェイズフィールド法を用いた平均曲率流の近似解の構成について述べる。$\varepsilon \in (0,1)$、$W(s) = \dfrac{(1-s^2)^2}{2}$ とする。また、簡単の為 $\Omega = \mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ (即ち周期境界条件) とする。以下の Allen-Cahn 方程式を考える：

$$\begin{cases} \varphi^\varepsilon_t = \Delta \varphi^\varepsilon - \dfrac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \varphi^\varepsilon(x,0) = \varphi^\varepsilon_0(x), & x \in \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

Allen-Cahn 方程式は 2 相問題で用いられる偏微分方程式であり、Ω を $\{\varphi^\varepsilon(\cdot,t) \approx 1\}$ と $\{\varphi^\varepsilon(\cdot,t) \approx -1\}$ の 2 相に分ける性質を持つ。既知の事実として、$\varepsilon \to 0$ としたとき、(1.4) のゼロレベルセットが平均曲率流に近づくこと、即ち、N_t を平均曲率流としたとき、$\{\varphi^\varepsilon(\cdot,0) = 0\} = N_0$ であれば十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $\{\varphi^\varepsilon(\cdot,t) = 0\} \approx N_t$ となることが知られている ([4, 6] 等を参照)。このことから、体積保存平均曲率流に対応する Allen-Cahn 方程式を考察し、弱解の構成を行うのが本研究の目標である。

体積保存平均曲率流に対して、Rubinstein と Sternberg [10] は次の非局所項付き Allen-Cahn 方程式の考察を行った:

$$\begin{cases} \varphi^\varepsilon_t = \Delta \varphi^\varepsilon - \dfrac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \lambda^\varepsilon_1, & (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \\ \varphi^\varepsilon(x,0) = \varphi^\varepsilon_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.5}$$

ここで $\lambda_1(t) := \fint_\Omega \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\,dx = \frac{1}{\mathcal{L}^d(\Omega)}\int_\Omega \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\,dx$ とした。

発散定理より、(1.5) は体積保存条件、即ち

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi^\varepsilon\,dx = \int_\Omega \varphi_t^\varepsilon\,dx = 0 \tag{1.6}$$

を満たす。つまり、$\{\varphi^\varepsilon(\cdot,t)\approx 1\}$ と $\{\varphi^\varepsilon(\cdot,t)\approx -1\}$ の体積の比が一定であることを表している。ゼロレベルセット $\{\varphi^\varepsilon(\cdot,t)=0\}$ の速度と単位法線ベクトルはそれぞれ $\frac{-\varphi_t^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|}$ と $\frac{\nabla\varphi^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|}$ で与えられることから、

$$v\approx\frac{-\varphi_t^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|},\quad H\approx\frac{-\Delta\varphi^\varepsilon+\frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}}{|\nabla\varphi^\varepsilon|},\quad \langle H\rangle\approx\frac{\lambda_1^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|},\quad \nu\approx\frac{\nabla\varphi^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|} \tag{1.7}$$

と考えることができる。ここで ν は M_t の単位法線ベクトルとした。また、(1.6) より、部分積分を用いると

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2}+\frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\,dx = \int_\Omega\Big(\varepsilon\nabla\varphi^\varepsilon\cdot\nabla\varphi_t^\varepsilon+\frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\varphi_t^\varepsilon\Big)\,dx\\
=&\int_\Omega\varepsilon\Big(-\Delta\varphi^\varepsilon+\frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\Big)\varphi_t^\varepsilon\,dx=\int_\Omega\varepsilon(-\varphi_t^\varepsilon+\lambda_1^\varepsilon)\varphi_t^\varepsilon\,dx\\
=&-\int_\Omega\varepsilon(\varphi_t^\varepsilon)^2\,dx+\varepsilon\lambda_1^\varepsilon\int_\Omega\varphi_t^\varepsilon\,dx=-\int_\Omega\varepsilon(\varphi_t^\varepsilon)^2\,dx
\end{aligned}\tag{1.8}$$

を得る。ここで

$$\mathcal{H}^{d-1}(M_t)\approx\frac{1}{\sigma}\int_\Omega\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2}+\frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\,dx\quad\text{and}\quad\int_\Omega v^2\,d\mathcal{H}^{d-1}\approx\frac{1}{\sigma}\int_\Omega\varepsilon(\varphi_t^\varepsilon)^2\,dx \tag{1.9}$$

の近似 [6] を用いると、(1.8) は (1.3) に対応しているといえる。 ここで $\sigma:=\int_{-1}^1\sqrt{2W(s)}\,ds$ とした。 Rubinstein と Sternberg [10] は適切な条件下では (1.5) の解のゼロレベルセットが体積保存平均曲率流に近づくことを示した。

2011 年に、Brassel と Bretin [3] は (1.5) に類似した以下の方程式を考察した:

$$\begin{cases}\varphi_t^\varepsilon=\Delta\varphi^\varepsilon-\frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}+\lambda_2^\varepsilon\frac{\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}}{\varepsilon}, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\ \varphi^\varepsilon(x,0)=\varphi_0^\varepsilon(x), & x\in\Omega.\end{cases}\tag{1.10}$$

ここで

$$\lambda_2=\lambda_2(t):=\frac{\int_\Omega\frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\,dx}{\int_\Omega\frac{\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}}{\varepsilon}\,dx}$$

とした。(1.10) もまた体積保存条件 (1.6) を満たす。彼らは (1.10) が (1.5) よりも数値計算においては精度が良いことを示している。一見、(1.10) の右辺第 3 項は不自然にも見えるが、ディリクレエネルギーとポテンシャルエネルギーの釣り合い $\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2}=\frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}$ を仮定すると $\frac{\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}}{\varepsilon}=|\nabla\varphi^\varepsilon|$ となる。よって (1.7) と同様に考えると

$$\langle H\rangle\approx\lambda_2^\varepsilon\frac{\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}/\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|}\approx\lambda_2^\varepsilon \tag{1.11}$$

から形式的に (1.10) から得られる界面の速度は $v=H-\lambda_2^\varepsilon$ となることがわかる。

また、$\sqrt{2W(s)}=0$ と $s=\pm1$ が同値であることと最大値原理を用いると、適切な初期値 φ_0^ε を選べば (1.10) の解 φ^ε は $\sup_{\Omega\times[0,\infty)}|\varphi^\varepsilon|\le 1$ を満たす（(1.5) ではそうとは限らない）。しかし、(1.10) は (1.8) のようなエネルギー評価を持たないという問題がある。

Remark 1.1. (1.5) または (1.10) を用いて体積保存平均曲率流の弱解の時間大域解を得るためにはラグランジュ未定乗数 $\lambda_1^\varepsilon, \lambda_2^\varepsilon$ の良い評価が必要であるものの、未解決である。実際、[1] では (1.5) に対して

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)}\int_0^T \varepsilon^2(\lambda_1^\varepsilon)^2\,dt$$

の有界性が得られているものの、本研究で扱う体積保存平均曲率流の弱解 (L^2-flow) の存在及び [7] と同様な単調性公式を導出するにはそれよりも強い

$$\sup_{\varepsilon\in(0,1)}\int_0^T \varepsilon(\lambda_1^\varepsilon)^2\,dt$$

の有界性が必要となる。

本研究では、1997 年に Golovaty [5] によって提案された以下の非局所項付き Allen-Cahn 方程式を考える:

$$\begin{cases} \varphi_t^\varepsilon = \Delta\varphi^\varepsilon - \dfrac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \lambda^\varepsilon\dfrac{\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}}{\varepsilon}, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty), \\ \varphi^\varepsilon(x,0) = \varphi_0^\varepsilon(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

ここで

$$\begin{aligned} \lambda^\varepsilon = \lambda^\varepsilon(t) &= \frac{-\int_\Omega \sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}\Big(\Delta\varphi^\varepsilon - \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\Big)\,dx}{2\int_\Omega \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\,dx} \\ &= \frac{-2\int_\Omega \varphi^\varepsilon\Big(\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)\,dx}{\int_\Omega W(\varphi^\varepsilon)\,dx} \end{aligned} \tag{1.13}$$

とした (2 行目の等式は部分積分を用いた)。[5] では (1.12) の球対称解の特異極限が考察されている。もし (1.12) が体積保存条件を持つのであれば、(1.7)、(1.11) と同様に

$$v \approx \frac{-\varphi_t^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|}, \quad H \approx \frac{-\Delta\varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}}{|\nabla\varphi^\varepsilon|}, \quad \langle H\rangle \approx \lambda^\varepsilon\frac{\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}/\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|} \approx \lambda^\varepsilon, \quad \nu \approx \frac{\nabla\varphi^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|}$$

と考えることができる。(1.10) と同様、(1.12) の場合においても適切な初期値 φ_0^ε を選べば解 φ^ε は $\sup_{\Omega\times[0,\infty)}|\varphi^\varepsilon| \le 1$ を満たす。 $k(s) = \int_0^s \sqrt{2W(\tau)}\,d\tau = s - \frac{1}{3}s^3$ と定義する。このとき (1.12) は

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega k(\varphi^\varepsilon)\,dx = \int_\Omega \varphi_t^\varepsilon\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}\,dx = 0 \tag{1.14}$$

を満たすことが分かる((1.12) に対して (1.14) を仮定すると (1.13) が導出される)。(1.14) は (1.6) と同様の性質といえる。実際、$\lim_{\varepsilon\to0}\varphi^\varepsilon = \pm1$ a.e. を仮定すると、$\lim_{\varepsilon\to0}k(\varphi^\varepsilon) = \pm\frac{\sigma}{2}$ a.e. であるから

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega k(\varphi^\varepsilon)\,dx = \frac{\sigma}{2}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega \varphi^\varepsilon\,dx \tag{1.15}$$

となる。(1.14) を用いると

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\,dx = \int_\Omega \Big(\varepsilon\nabla\varphi^\varepsilon\cdot\nabla\varphi_t^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\varphi_t^\varepsilon\Big)\,dx \\ &= \int_\Omega \varepsilon\Big(-\Delta\varphi^\varepsilon + \frac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2}\Big)\varphi_t^\varepsilon\,dx = \int_\Omega \varepsilon\Big(-\varphi_t^\varepsilon + \lambda^\varepsilon\frac{\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}}{\varepsilon}\Big)\varphi_t^\varepsilon\,dx \\ &= -\int_\Omega \varepsilon(\varphi_t^\varepsilon)^2\,dx + \lambda^\varepsilon\int_\Omega \varphi_t^\varepsilon\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}\,dx = -\int_\Omega \varepsilon(\varphi_t^\varepsilon)^2\,dx \end{aligned} \tag{1.16}$$

を得る。(1.9) の近似を用いると、(1.16) もまた (1.3) に対応していることが分かる。 以上をまとめると、(1.3) と同様に (1.12) に対して (1.16) が成り立つようにすると、(1.14) と (1.15) から体積保存条件が出てくるという仕組みになっている。(1.12) は式が複雑ではあるものの、(1.10) の問題を解消しているといえる。

Remark 1.2. (1.15) と違う方法で、(1.14) が体積保存条件とみなすことが出来る。それには

$$-\int_{M_t} v\,d\mathcal{H}^{d-1} \approx \frac{1}{\sigma}\int_\Omega \varphi_t^\varepsilon \sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}\,dx$$

であることを示せばよい。実際、エネルギーの釣り合い $\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} = \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}$ を仮定し、近似式 (1.9)、相加相乗平均と $v \approx \frac{-\varphi_t^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|}$ であることを用いると

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi_t^\varepsilon \sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}\,dx &\approx -\int_\Omega v|\nabla\varphi^\varepsilon|\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}\,dx = -\int_\Omega v\Big(\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)\,dx\\ &\approx -\sigma\int_{M_t} v\,d\mathcal{H}^{d-1}\end{aligned}$$

が成り立つ。

2. Preliminaries and main results

曲面の発展方程式に対する弱解の定義を述べるために、幾何学的測度論に関するいくつかの定義を紹介する (例えば [11] を参照)。

Definition 2.1. $M \subset \mathbb{R}^d$ が k-rectifiable set（修正可能集合）であるとは、ある C^1 級 k-次元部分多様体 $\{M_i\}_{i=1}^\infty$ が存在して $\mathcal{H}^k(M \setminus \cup_{i=1}^\infty M_i) = 0$ が成り立つことである。

Remark 2.2. $M \subset \mathbb{R}^d$ が k-rectifiable set であるならば、$\mathcal{H}^k$ の測度の意味で殆ど至る所 approximate tangent plane（概接平面）が存在する。
ここで M が approximate tangent plane P を x_0 で持つとは、

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\int_{\eta_{x_0,\lambda}(M)} f(y)\,d\mathcal{H}^k(y) = \int_P f(y)\,d\mathcal{H}^k(y)$$

が任意の $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ について成り立つことである。ここで $\eta_{x_0,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda}(x - x_0)$ とした。

Definition 2.3. $(d-1)$-rectifiable set M に対して、$\vec{H}$ が generalized mean curvature vector であるとは、

$$\int_M \mathrm{div}_M\, g\,d\mathcal{H}^{d-1} = -\int_M \vec{H}\cdot g\,d\mathcal{H}^{d-1}$$

が任意の $g \in C_c^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ について成り立つことである。ここで $g = (g_1,\ldots,g_d)$、$\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_d)$ を M の単位法線ベクトルとしたとき、$\mathrm{div}_M\, g = \sum_{k,l=1}^d \partial_{x_k} g_l(\delta_{kl} - \nu_k\nu_l)$ である。

Remark 2.4. もし M が滑らかで閉であれば、多様体上の発散定理により $\vec{H}$ は通常の M の平均曲率ベクトルである。また、修正可能集合の性質から、概接平面に対する単位法線ベクトル ν は M 上殆ど至る所存在する。

Definition 2.5. Radon measure μ が k-rectifiable であるとは、ある k-次元修正可能集合 M と関数 $\theta : M \to [0,\infty)$ が存在して、$\theta \in L^1_{loc}(\mathcal{H}^k\lfloor_M)$ かつ $\mu = \theta\mathcal{H}^k\lfloor_M$ が成り立つことである。特に θ の値域が $\mathbb{N}$ であるときには k-integral という。

本研究では Brakke の弱解 [2] と類似した以下の弱解を導入する:

Definition 2.6 (L^2-flow [8])**.** $\{\mu_t\}_{t\in(0,T)}$ を $\mathbb{R}^d$ 上の Radon mesure の族とし、$d\mu = d\mu_t dt$ とする。以下が満たされるとき、 $\{\mu_t\}_{t\in(0,T)}$ は L^2-flow であるという:

(1) a.e. $t \in (0,T)$ に対し μ_t は $(d-1)$-rectifiable かつ generalized mean curvature vector(一般化された平均曲率ベクトル) $\vec{H} \in L^2(\mu_t;\mathbb{R}^d)$ を持ち、
(2) ある定数 $C>0$ とベクトル場 $\vec{v} \in L^2(\mu,\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\vec{v}(x,t) \perp T_x\mu_t \quad \text{for } \mu\text{-a.e. } (x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T) \tag{2.1}$$

かつ

$$\Big|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (\eta_t + \nabla\eta \cdot \vec{v})\, d\mu_t dt\Big| \le C\|\eta\|_{C^0(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \tag{2.2}$$

が任意の $\eta \in C^1_c(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ について成り立つ。 ここで $T_x\mu_t$ は μ_t の概接平面とした。

また、これらを満たす $\vec{v} \in L^2(\mu,\mathbb{R}^d)$ を generalized velocity vector(一般化された速度ベクトル) と呼ぶ。

次に、μ_t, μ の近似の測度を以下で定める。

$$\mu_t^\varepsilon(\phi) := \frac{1}{\sigma}\int_{\mathbb{R}^d} \phi\Big(\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)dx, \tag{2.3}$$

for any $\phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

$$\mu^\varepsilon(\psi) := \frac{1}{\sigma}\int_{[0,\infty)}\int_{\mathbb{R}^d} \psi\Big(\frac{\varepsilon|\nabla\varphi^\varepsilon|^2}{2} + \frac{W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\Big)dxdt, \tag{2.4}$$

for any $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d \times [0,\infty))$. さらに M_t の速度ベクトルの近似を

$$\vec{v^\varepsilon} = \begin{cases} \frac{-\varphi_t^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|}\frac{\nabla\varphi^\varepsilon}{|\nabla\varphi^\varepsilon|}, & \text{if } |\nabla\varphi^\varepsilon| \neq 0, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する。本研究における主結果は以下のとおりである:

Theorem 2.7. $d=2,3$ とする。このときある部分列 $\varepsilon \to 0$ が存在して以下が成り立つ:

(a) $\mathbb{R}^d$ 上の $(d-1)$-integral Radon measures の族 $\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が存在して次が成り立つ:
  (a1) $\mu^\varepsilon \to \mu$ as Radon measures on $\mathbb{R}^d \times [0,\infty)$, where $d\mu = d\mu_t dt$.
  (a2) $\mu_t^\varepsilon \to \mu_t$ as Radon measures for a.e. $t \in [0,\infty)$.
(b) 関数 $\varphi \in BV_{loc}(\Omega \times [0,\infty)) \cap C^{\frac{1}{2}}_{loc}([0,\infty); L^1(\Omega))$ が存在して
  (b1) $\varphi^\varepsilon \to 2\varphi - 1$ in $L^1_{loc}(\Omega \times [0,\infty))$ and a.e. pointwise.
  (b2) $\varphi(\cdot,0) = \chi_{U_0}$ a.e. on Ω.
  (b3) $\varphi(\cdot,t)$ はすべての $t \in [0,\infty)$ に対して特性関数かつ

$$\int_\Omega \varphi(x,t)\, dx = \mathcal{L}^d(U_0)$$

  が成り立つ。
  (b4) すべての $t \in [0,\infty)$ と $\phi \in C_c(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^+)$ に対して $\|\nabla\varphi(\cdot,t)\|(\phi) \le \mu_t(\phi)$ と $\operatorname{spt}\|\nabla\varphi(\cdot,t)\| \subset \operatorname{spt}\mu_t$ が成り立つ。
(c) ベクトル値関数 $\vec{g} \in L^2(\mu;\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^d\times(0,\infty)} -\lambda^\varepsilon\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}\nabla\varphi^\varepsilon \cdot \Phi\, d\mu^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d\times(0,\infty)} \vec{g}\cdot\Phi\, d\mu \tag{2.5}$$

がすべての $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^d \times [0,\infty);\mathbb{R}^d)$ に対して成り立つ。

(d) $\{\mu_t\}_{t\in(0,\infty)}$ は一般化された速度ベクトル $\vec{v}=\vec{H}+\vec{g}$ をもつ L^2-flow であり

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d\times(0,\infty)}\vec{v^\varepsilon}\cdot\Phi\,d\mu^\varepsilon=\int_{\mathbb{R}^d\times(0,\infty)}\vec{v}\cdot\Phi\,d\mu \tag{2.6}$$

が任意の $\Phi\in C_c(\mathbb{R}^d\times[0,\infty);\mathbb{R}^d)$ について成り立つ。さらに、ある可測関数 $\partial^*\{\varphi=1\}\to\mathbb{N}$ が存在して

$$\vec{v}=\vec{H}-\frac{\lambda}{\theta}\nu \qquad \mathcal{H}^d\text{-a.e. on }\partial^*\{\varphi(\cdot,t)=1\} \tag{2.7}$$

が成り立つ。ここで ν は集合 $\{\varphi(\cdot,t)=1\}$ に対する $\partial^*\{\varphi(\cdot,t)=1\}$ の内向き単位法線ベクトルである。

(e) (Volume preserving property)

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\vec{v}\cdot\nu\,d\|\nabla\varphi(\cdot,t)\|dt=0 \tag{2.8}$$

がすべての $0\le t_1<t_2<\infty$ について成り立つ。ここで $\|\nabla\varphi(\cdot,t)\|$ は $\varphi(\cdot,t)$ の全変動測度である。

3. Lagrange multiplier λ^ε の評価と単調性公式

ここでは主結果の証明の鍵となる Lagrange multiplier λ^ε の評価について述べる。初期値 M_0 は空集合でないと仮定し、(1.12) の解の初期値 φ_0^ε は $M_0=\{\varphi_0^\varepsilon=0\}$ を満たすと仮定する。このとき $\left|\int_\Omega k(\varphi_0^\varepsilon)\,dx\right|\le\frac{2}{3}|\Omega|-\omega$ を満たす $\omega>0$ があるとしてよい (そのような ω が存在しない場合は $\varphi_0^\varepsilon\equiv\pm1$ となり、M_0 は空集合となる)。Bronsard と Stoth の評価 [1] と同様の議論を用いて以下の評価を得た:

Proposition 3.1. ある定数 $c_1=c_1(\omega,D_1)>0$ と $\epsilon_1>0$ が存在して

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\epsilon_1)}\int_0^T|\lambda^\varepsilon(t)|^2\,dt\le c_1(1+T) \tag{3.1}$$

が成り立つ。

Remark 3.2. [8, 9] と同様の議論を用いると、(1.16) と (3.1) により (2.2) が導かれ、$\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が L^2-flow であることが示される (後述)。

次に、Proposition 3.1 を用いて単調性公式を示す。

$$\rho=\rho_{y,s}(x,t):=\frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{d-1}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(s-t)}},\qquad t<s,\ x,y\in\mathbb{R}^d$$

と定義する。これは後ろ向き熱核と呼ばれる。単調性公式を局所的な評価にする為に、cut-off 関数 η を

$$\eta(x)\in C_c^\infty(B_{\frac12}(0))\quad\text{with}\quad\eta=1\text{ on }B_{\frac14}(0)\quad\text{and}\quad 0\le\eta\le1$$

をみたすものとして導入し、

$$\tilde\rho_{(y,s)}(x,t):=\rho_{(y,s)}(x,t)\eta(x-y)=\frac{1}{(4\pi(s-t))^{\frac{d-1}{2}}}e^{-\frac{|x-y|^2}{4(s-t)}}\eta(x-y),\qquad t<s,\ x,y\in\mathbb{R}^d$$

と定義する。この $\tilde\rho$ と (1.12) に関して単調性公式を得た:

Proposition 3.3. d にのみ依存する定数 $c_2>0$ が存在して

$$\int_\Omega \tilde\rho\, d\mu_t^\varepsilon(x)\Big|_{t=t_2} \le \Big(\int_\Omega \tilde\rho\, d\mu_t^\varepsilon(x)\Big|_{t=t_1} + c_2\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{128(s-t)}}\mu_t^\varepsilon(B_{\frac12}(y))\,dt\Big)e^{c_1(1+(t_2-t_1))} \tag{3.2}$$

が任意の $y\in\Omega$ と $0\le t_1<t_2$ に対して成り立つ。

略証. [7] と同様の議論を用いると、ある定数 $c_2>0$ が存在して、任意の $y\in\Omega$ と $0\le t_1<t_2$ に対して

$$\int_\Omega \tilde\rho\, d\mu_t^\varepsilon(x)\Big|_{t=t_2} \le \Big(\int_\Omega \tilde\rho\, d\mu_t^\varepsilon(x)\Big|_{t=t_1} + c_2\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{128(s-t)}}\mu_t^\varepsilon(B_{\frac12}(y))\,dt\Big)e^{\int_{t_1}^{t_2}|\lambda^\varepsilon(t)|^2\,dt} \tag{3.3}$$

が成り立つ。(3.1) と (3.3) より (3.2) を得る。 □

4. 主結果の証明の概略

最後に Theorem 2.7 の証明の概略について述べたい。証明には以下の定理を用いる:

Theorem 4.1 (See [9]). $d=2,3$ とし、関数 φ^ε を以下の解とする:

$$\begin{cases} \varphi_t^\varepsilon = \Delta\varphi^\varepsilon - \dfrac{W'(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \dfrac{g^\varepsilon}{\varepsilon}, & (x,t)\in\Omega\times(0,\infty). \\ \varphi^\varepsilon(x,0)=\varphi_0^\varepsilon(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{4.1}$$

ある定数 $\epsilon>0$ が存在して

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\epsilon)}\Big(\mu_0^\varepsilon(\Omega)+\int_{\Omega_T}\frac{1}{\varepsilon}(g^\varepsilon)^2\,dxdt\Big)<\infty \tag{4.2}$$

が成り立つとする。このときある部分列 $\varepsilon\to0$ が存在して以下が成り立つ:

(1) ある Ω 上の $(d-1)$-integral Radon measure の族 $\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が存在して
  (a) Radon measure の意味で $\mu^\varepsilon\to\mu$ on $\Omega\times[0,\infty)$ が成り立つ。ここで $d\mu=d\mu_t dt$ とした。
  (b) Radon measure の意味で $\mu_t^\varepsilon\to\mu_t$ が任意の $t\in[0,\infty)$ について成り立つ。

(2) あるベクトル値関数 $\vec g\in L^2(\mu;\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega\times(0,\infty)} -g^\varepsilon\nabla\varphi^\varepsilon\cdot\Phi\,dxdt = \int_{\Omega\times(0,\infty)}\vec g\cdot\Phi\,d\mu \tag{4.3}$$

  が任意の $\Phi\in C_c(\mathbb{R}^d\times[0,\infty);\mathbb{R}^d)$ に対して成り立つ。

(3) $\{\mu_t\}_{t\in(0,\infty)}$ は一般化された速度ベクトル $\vec v=\vec H+\vec g$ を持つ L^2-flow であり、

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Omega\times(0,\infty)}\vec{v^\varepsilon}\cdot\Phi\,d\mu^\varepsilon = \int_{\Omega\times(0,\infty)}\vec v\cdot\Phi\,d\mu \tag{4.4}$$

  が任意の $\Phi\in C_c(\mathbb{R}^d\times[0,\infty);\mathbb{R}^d)$ に対して成り立つ。

Theorem 2.7 の証明の概略. $g^\varepsilon := \lambda^\varepsilon\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}$ とおく。(1.16) と (3.1) を用いると、ある $C>0$ が存在して任意の $T>0$ に対して

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\epsilon_1)}\int_0^T\int_\Omega\frac{1}{\varepsilon}(g^\varepsilon)^2\,dxdt = \sup_{\varepsilon\in(0,\epsilon_1)}\int_0^T(\lambda^\varepsilon)^2\int_\Omega\frac{2W(\varphi^\varepsilon)}{\varepsilon}\,dxdt \le C(1+T) \tag{4.5}$$

が成り立つ。これにより、φ^ε は Theorem 4.1 のすべての仮定を満たすように取ることができる。これにより、(a) と $\{\mu_t\}_{t\in[0,\infty)}$ が一般化された速度ベクトル $\vec v=\vec H+\vec g$ を持つ L^2-flow であることが示された。

次に (2.7) を示す。(4.3) より、任意の $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^d \times [0,\infty);\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times(0,\infty)} \vec{g}\cdot\Phi\,d\mu &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega\times(0,\infty)} -\lambda^\varepsilon\sqrt{2W(\varphi^\varepsilon)}\nabla\varphi^\varepsilon\cdot\Phi\,dxdt \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega\times(0,\infty)} -\lambda^\varepsilon\nabla k(\varphi^\varepsilon)\cdot\Phi\,dxdt = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sigma}\int_{\Omega\times(0,\infty)}\lambda^\varepsilon k(\varphi^\varepsilon)\mathrm{div}\,\Phi\,dxdt.\end{aligned} \tag{4.6}$$

$\tilde{\varphi} := \lim_{\varepsilon\to 0}\varphi^\varepsilon$ とおく。(4.6)、Radon-Nikodym の定理、$\lim_{\varepsilon\to 0}k(\varphi^\varepsilon) = \frac{\sigma}{2}\tilde{\varphi} = \sigma(\varphi - \frac{1}{2})$ a.e. on $\Omega\times(0,\infty)$ であることから

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\times(0,\infty)} \vec{g}\cdot\Phi\,d\mu &= \int_0^\infty \lambda\int_\Omega(\varphi-\frac{1}{2})\mathrm{div}\,\Phi\,dxdt = \int_0^\infty\lambda\int_\Omega\varphi\mathrm{div}\,\Phi\,dxdt \\ &= -\int_0^\infty\lambda\int_\Omega\vec{\nu}\cdot\Phi\,d\|\nabla\varphi(\cdot,t)\|dt = \int_{\Omega\times(0,\infty)} -\lambda\frac{d\|\nabla\varphi(\cdot,t)\|}{d\mu_t}\vec{\nu}\cdot\Phi\,d\mu_t dt\end{aligned} \tag{4.7}$$

が任意の $\Phi\in C_c(\mathbb{R}^d\times[0,\infty);\mathbb{R}^d)$ について成り立つ。ここで $\vec{\nu}$ は $\partial^*\{\varphi(\cdot,t)\}$ 上での $\{\varphi(\cdot,t)=1\}$ の inner normal vector とした。関数 $\theta : \partial^*\{\varphi=1\}\to(0,\infty)$ を $\theta := \left(\frac{d\|\nabla\varphi(\cdot,t)\|}{d\mu_t}\right)^{-1}$ で定義する。μ_t が integral であることから、$\theta\in\mathbb{N}$ $\mathcal{H}^d$-a.e. が成り立つ。よって (2.7) を得た。

最後に (e) を示す。任意の $t\geq 0$ に対して $\|\nabla\varphi(\cdot,t)\| = \frac{1}{2}\|\nabla\tilde{\varphi}(\cdot,t)\|$ が成り立つことを用いると

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\vec{v}\cdot\vec{\nu}\,d\|\nabla\varphi(\cdot,t)\|dt &= \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\vec{v}\cdot\vec{\nu}\,d\|\nabla\tilde{\varphi}(\cdot,t)\|dt \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega\varphi_t^\varepsilon\,dxdt = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\varphi^\varepsilon\,dx\Big|_{t=t_1}^{t_2} = 0\end{aligned} \tag{4.8}$$

を得る。ここで [8, Proposition 4.5]、(1.15)、$\varphi^i\to\pm 1$ a.e. on $\Omega\times[0,\infty)$ を用いた。 □

References

[1] Bronsard, L. and Stoth, B., *Volume-preserving mean curvature flow as a limit of a nonlocal Ginzburg-Landau equation*, SIAM J. Math. Anal., **28** (1997), 769–807.

[2] Brakke, K. A., *The motion of a surface by its mean curvature*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1978).

[3] Brassel, M. and Bretin, E., *A modified phase field approximation for mean curvature flow with conservation of the volume*, Math. Methods Appl. Sci., **34** (2011), 1157–1180.

[4] Evans, L. C., Soner, H. M. and Souganidis, P. E., *Phase transitions and generalized motion by mean curvature*, Comm. Pure Appl. Math., **45** (1992), 1097–1123.

[5] Golovaty, D., *The volume-preserving motion by mean curvature as an asymptotic limit of reaction-diffusion equations*, Quart. Appl. Math., **55** (1997), no.2, 243–298.

[6] Ilmanen, T., *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature*, J. Differential Geom., **38** (1993), no. 2, 417–461.

[7] Liu, C., Sato, N. and Tonegawa, Y., *On the existence of mean curvature flow with transport term*, Interfaces Free Bound., **12** (2010), no.2, 251–277.

[8] Mugnai, L. and Röger, M., *The Allen-Cahn action functional in higher dimensions*, Interfaces Free Bound., **10** (2008), 45–78.

[9] Mugnai, L. and Röger, M., *Convergence of perturbed Allen-Cahn equations to forced mean curvature flow*, Indiana Univ. Math. J., **60** (2011), 41–75.

[10] Rubinstein, J. and Sternberg, P., *Nonlocal reactiondiffusion equations and nucleation*, IMA Journal of Applied Mathematics, **48** (1992), 249–264.

[11] Simon, L., *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ. **3** (1983).

E-mail address: `takasao@ms.u-tokyo.ac.jp`