

磁場軌道と接触構造

筑波大学数理物質系
井ノ口順一

概要

Marian Ioan Munteanu 氏, Ana Irina Nistor 氏との接触磁場に関する研究成果を報告する.

1 磁場

真空中の静磁場 $\mathbf{H}$ とその磁束密度 $\mathbf{B}$ は $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ という関係にある. 正定数 μ_0 は真空の透磁率とよばれる. このとき $\mathbf{B}$ は $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ をみたす. 電荷密度 $\mathbf{B}$ は擬ベクトル場とよばれる数学の対象である. 擬ベクトル場は 2 次微分形式と捉えることが適切である. $\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$ を 2 次微分形式と捉え直したものを

$$B = B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2, \quad B_j = B^j$$

と表し, (電荷 q の) 荷電粒子の運動方程式

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = q\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}(t))$$

を書き換えてみる. $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ は $dB = 0$ に他ならない. Euclid 空間 $\mathbb{E}^3$ の内積 $(\cdot | \cdot)$ を使って $B(x, y) = (Lx | y)$ で線型変換 L を定めると L の標準基底に関する表現行列は

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -B_3 & -B_2 \\ B_3 & 0 & -B_1 \\ B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = qL\dot{\mathbf{r}}(t)$$

と書き直せる. この書き換えをみると荷電粒子の運動方程式を多様体に一般化するには Riemann 計量と閉 2 次微分形式が与えられていればよいことがわかる.

Riemann 多様体 (M, g) に閉 2 次微分形式 F を指定したもの (M, g, F) を考察することにしよう. F を (M, g) 上の**磁場** (magnetic field) とよぶ. $\nabla F = 0$ のとき**一様磁場** (uniform magnetic field) とよぶ (∇ は Levi-Civita 接続).

$$F(X, Y) = g(LX, Y), \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

で $L \in \Gamma(\text{End}(TM))$ を定義し F の定める **Lorentz 力** と名付ける. 常微分方程式

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = qL\dot{\gamma}$$

の解である曲線 $\gamma(t)$ を**磁場軌道** (magnetic trajectory) とか magnetic geodesic とよぶ.

Riemann 多様体 (M, g) の磁場磁場軌道の研究はどこまで遡れるかは (筆者には) 特定できていない (マックスウェルの方程式を微分形式を使って書き換えることは Kähler が行っていたそうである).

ソビエト連邦の時代, Arnold は Riemann 多様体の磁場軌道を 1961 年の論文ですでに論じている [3]. また 1980 年代に周期軌道の存在を問う問題を提起している. 周期軌道については Ginzburg を始めとする多くの研究がある ([4, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 45]).

磁場軌道の方程式 $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = qL\dot{\gamma}$ の変分法的導出も説明しておこう.

磁場 F がポテンシャル A をもつとする. このとき **Landau-Hall 汎函数** とよばれる作用積分

$$\text{IH}(\gamma) = \int \frac{1}{2} \|\dot{\gamma}'(t)\|^2 dt + q \int A(\gamma'(t)) dt$$

の Euler-Lagrange 方程式が磁場軌道の方程式である. $q = 0$ ならば Landau-Hall 汎函数はエネルギー汎函数であり, その停留点は測地線である.

2 偶数次元の場合

向きづけられた 2 次元 Riemann 多様体 (M, g) を考える. 面積要素 dA は閉形式である. 正値 C^∞ 級函数を用いて磁場 $F = k dA$ を与えよう. Arnold は次の予想を提出している (1981).

(M, g) を種数が 1 以上の閉曲面とする. このとき (M, g, F) は少なくとも 3 つの閉軌道をもつ.

Arnold は種数 1 のときこの予想は正しいことを示した (1984). 種数が 2 以上のときはこの予想は正しくない. 実際 Ginzburg が反例を与えた. S^2 上の磁場について Ginzburg は以下の結果を得ている.

g を S^2 の任意の Riemann 計量とする.

- 充分小さな $c > 0$ に対し $E_c = \{(x; v) \in TM \mid g_x(v, v) = c\}$ は 2 つの単純閉軌道を含む.
- g が標準計量 g_0 に, k が充分, 正定数に近ければどの等エネルギー面 E_c も閉軌道を含む.
- $c > 0$ が充分大きければ E_c は閉軌道を含む.

Schneider は次の結果を得ている.

定理 2.1 ([40]) 次のどれかがみたされていれば $(S^2, g, k dA)$ に C^2 級の閉軌道が存在する.

- $4 \inf k \geq (\inf g)^{-1} (2\pi + \sup K_g^- \cdot \text{vol}(S^2, g))$.

- $K_g > 0, 2 \inf k \geq \sup \sqrt{K_g}.$
- $\sup K_g < 4 \inf K_g$

Rosenberg と Smith は次の新たな予想を与えた (2010) .

S^2 に磁場 $F = k \, dA$ を与えたとき自己交叉しない閉軌道 (embedded closed trajectory) が存在する.

一方, 砂田 [44] は種数 2 以上の閉 Riemann 面 $\mathbb{H}^2/\Gamma$ に dA から誘導される磁場を考察している. 向きづけられた 2 次元 Riemann 多様体 (M^2, g) に面積要素を与えたもの (M^2, g, dA) は複素 1 次元 Kähler 多様体とすることができる. すなわち Kähler 多様体 (M, g, J) の Kähler 形式 Ω を磁場として採用するのである (Kähler 磁場) .

足立 [1] は Kähler 多様体 (とくに複素空間形) の Kähler 磁場の研究を始めた (Kalinin[38] も参照) . 複素空間形および複素空間形内の実超曲面の磁場に関する多くの研究成果がある (足立・前田・宇田川 [2], 足立・包 [6] 等を参照) .

また等質 Kähler 多様体 (Kähler C -space) の Kähler 磁場および等質佐々木多様体の接触磁場については井川による一連の研究 [21]–[28] と [5] がある.

3 接触構造

ここで佐々木多様体と接触磁場の定義を述べておこう.

$(2n+1)$ 次元多様体 M 上の 1 次微分形式 η が $(d\eta)^n \wedge \eta \neq 0$ をみたすとき**接触形式**とよぶ. 接触形式を備えた $(2n+1)$ 次元多様体 (M, η) を (強い意味での) **接触多様体**とよぶ^{*1}. 接触多様体 (M, η) 上で

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(\xi, \cdot) = 0$$

をみたすベクトル場 ξ が唯一定まる. これを **Reeb ベクトル場**とよぶ. さらに以下をみたす endomorphism 場 ϕ とリーマン計量 g が存在する.

$$\begin{aligned} \phi^2 &= -I + \eta \otimes \xi, \quad g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \\ g(X, \phi Y) &= d\eta(X, Y). \end{aligned}$$

接触多様体 M にこれらのテンソル場 (ϕ, ξ, g) を併せたもの (M, η, ξ, ϕ, g) を**接触 Riemann 多様体**とよぶ. より一般に $(2n+1)$ 次元多様体 M 上のテンソル場の組 (ϕ, ξ, η, g) が条件

$$\begin{aligned} \phi^2 &= -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1, \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \end{aligned}$$

^{*1} 接触リーマン幾何では大域的に定義された接触形式を接触構造とよび, $\eta = 0$ で定まる超平面場を接触分布とよぶ. 接触幾何・接触トポロジーでは積分不可能な超平面場を接触構造とよび, 大域的な接触形式の存在は仮定しない. 本稿で扱う接触多様体は大域的な接触形式をもつものばかりなのでこの定義を採用した.

をみたすとき (M, ϕ, ξ, η, g) を **概接触 Riemann 多様体** (almost contact Riemannian manifold) とよぶ.

3次元の場合, 次が知られている.

命題 3.1 ([7]) 任意の 3次元リーマン多様体 (M^3, g) に対し (M, ϕ, ξ, η, g) が概接触リーマン多様体となる (ϕ, ξ, η) が存在する.

概接触 Riemann 多様体に対し佐々木・畠山の捩率テンソル場 N が $N_\phi + 2d\eta \otimes \xi$ で定義される (N_ϕ は ϕ の Nijenhuis 捩率). $N = 0$ の概接触 Riemann 多様体は正規概接触 Riemann 多様体とよばれる. とくに正規接触 Riemann 多様体は **佐々木多様体** (Sasakian manifold) とよばれる.

命題 3.2 概接触 Riemann 多様体 $M = (M; \phi, \xi, \eta, g)$ が佐々木多様体であるための必要十分条件は

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

をみたすこと.

奇数次元球面 S^{2n+1} は佐々木多様体の典型例である. 複素空間形をまねて佐々木空間形 (Sasakian space form) が定義される. ξ と直交する単位接ベクトル X に対し断面曲率 $K(X \wedge \phi X)$ を **正則断面曲率** とよぶ. 正則断面曲率が一定な完備佐々木多様体を **佐々木空間形** とよぶ.

概接触 Riemann 多様体 M の基本 2 次微分形式 Φ が

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y)$$

で定義される. Φ は一般には閉形式ではない. M が接触リーマン多様体 (とくに佐々木多様体) のとき Φ は完全形式であるから Φ を磁場として採用できる.

Blair は正規概接触 Riemann 多様体で $d\Phi = 0$ をみたすものを **準佐々木多様体** (quasi-Sasakian manifold) と名付けた.

また $\nabla\phi = 0$ である概接触 Riemann 多様体は **coKähler 多様体** とか **cosymplectic 多様体** とよばれる. coKähler 多様体は準佐々木多様体であり Φ を一様磁場として採用できる.

基本 2 次微分形式が閉でない例を挙げておこう.

命題 3.3 概接触 Riemann 多様体 $M = (M; \phi, \xi, \eta, g)$ が

$$(\nabla_X \phi)Y = g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X$$

をみたすとき **剣持多様体** (Kenmotsu manifold) という.

剣持多様体の典型例は奇数次元双曲空間である. 剣持多様体は正規であるが $d\Phi \neq 0$ である.

概接触 Riemann 多様体 M において Φ が閉形式であるとき $F = q\Phi$ を M の **接触磁場** ($q \in \mathbb{R}$) とよぶことにする. Lorentz 力は $L = -q\phi$ である.

4 奇数次元の場合

元々の 3 次元に戻ってみよう．向きづけられた 3 次元 Riemann 多様体 (M, g) において Hodge の star 作用素により 2 次微分形式は発散のないベクトル場と同一視される．磁場 F に対応するベクトル場を V とすると $F = \iota_V dv_g$.

定義 4.1 Killing ベクトル場 V に対応する磁場を Killing 磁場という．

3 次元の向きづけられたリーマン多様体 (M^3, g, dv_g) において Killing 磁場は Kirchhoff 弾性棒と関連することが知られている．

V を磁場 F に対応するベクトル場とする ($\operatorname{div} V = 0$) . V の双対 1 次微分形式を ω とすると

$$\begin{aligned} g(LX, LY) &= g(V, V)\{g(X, Y) - \omega(X)\omega(Y)\} \\ L^2X &= -g(V, V)X + \omega(X)V. \end{aligned}$$

が成立する．とくに $g(V, V) = 1$ であれば (L, V, ω) は g と整合的な概接触構造でありその基本 2 次微分形式は $-F$ である．

この事実から $|V| = 1$ である磁場は g と整合的な概接触構造とすることができる．したがって（最初から）基本 2 次微分形式が閉である 3 次元概接触多様体で磁場を考えてもよい．とくに (M, ϕ, ξ, η, g) が 3 次元接触リーマン多様体の場合は $-F = d\eta$ であるから $-\eta$ がポテンシャルである．3 次元佐々木多様体の接触磁場は Killing 磁場であることに注意．

ここで接触幾何における Weinstein 予想を紹介する [48].

コンパクト接触多様体 M が $H^1(M; \mathbb{R}) = \{0\}$ をみたせば Reeb ベクトル場は閉軌道をもつ．

Taubes は 3 次元の場合に $H^1(M; \mathbb{R})$ に関する条件は不要であることを示し Weinstein 予想を解決した．

定理 4.1 ([46]) コンパクトな 3 次元有向接触多様体^{*2}の Reeb ベクトル場は閉軌道をもつ．

Weinstein 予想をまねて

3 次元 compact 接触 Riemann 多様体の接触磁場は閉軌道をもつか．

を提案する．3 次元コンパクト佐々木多様体の典型例は Berger 球（標準球面 S^3 を含む）である．正則断面曲率が一定値 $c > -3$ の佐々木構造を備えた 3 次元 Berger 球を $\mathcal{M}^3(c)$ で表す．($\mathcal{M}^3(1) = S^3$ に注意) ． $\mathcal{M}^3(c)$ の Reeb ベクトル場の生成する相流は $\mathcal{M}^3(c)$ 上の S^1 作用を定め軌道空間 $\mathcal{M}^3(c)/S^1$ は $S^2(c+3)$ である．

^{*2} 3 次元有向の仮定の下では大域的な接触形式が存在する．

註 4.1 (Thurston 幾何) Thurston 幾何のモデル空間 [47] の場合, それぞれの Riemann 計量に標準的に同伴する概接触 Riemann 構造は以下の性質をもっている.

- $\mathbb{E}^3, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ は cosymplectic 多様体.
- $\mathbb{S}^3, \text{Nil}_3, \widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R}$ は佐々木多様体 (佐々木空間形) .
- $\mathbb{H}^3$ は剣持多様体.
- Sol_3 は佐々木でない接触 Riemann 多様体で, CR 対称空間.
- Sol_3 以外すべて正規.

3 次元の単連結な佐々木空間形 $\mathcal{M}^3(c)$ は以下で与えられる.

- $c > 1$ のとき, SU_2 に特殊な左不変接触 Riemann 構造を与えたもの (Berger 球) .
- $c = 1$ のとき, $\mathbb{S}^3$.
- $-3 < c < 1$ のとき, SU_2 に特殊な左不変接触 Riemann 構造を与えたもの.
- $c = -3$ のとき, Heisenberg 群 Nil_3 .
- $c < -3$ のとき, $\widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R}$ に特殊な左不変接触 Riemann 構造を与えたもの.

Thurston 幾何におけるモデル空間 $\mathbb{S}^3, \text{Nil}_3, \widetilde{\text{SL}}_2\mathbb{R}$ は共通した性質「佐々木空間形」をもつ.

一般次元の佐々木多様体の場合の分類を述べる前にひとつ定義を行う.

定義 4.2 ([9]) 概接触 Riemann 多様体 M 内の弧長径数表示された曲線 $\gamma(s)$ に対し $\cos\theta(s) = \eta(\dot{\gamma}(s))$ で $\theta(s)$ を定め $\gamma(s)$ の**接触角** (contact angle) という. 接触角が一定のとき $\gamma(s)$ を**傾斜曲線** (slant curve) とよぶ.

定理 4.2 ([11]) 佐々木多様体における弧長径数表示された接触磁場曲線はすべて傾斜曲線で次のどれかと合同である.

- Reeb 流 (したがって測地線) ,
- 第 1 曲率が $\kappa_1 = \sqrt{q^2 - 1}$, 接触角が $\theta = \cos^{-1}(1/q)$ の円 (ただし $|q| > 1$) .
- 第 1 曲率 $\kappa_1 = |q|$, 第 2 曲率 $\kappa_2 = 1$ で接触分布の積分曲線.
- 第 1 曲率 $\kappa_1 = |q| \sin \theta$, 第 2 曲率 $\kappa_2 = |q \cos \theta - 1|$ ($\theta \neq \pi/2$) の螺旋.

とくに佐々木空間形の場合, 部分多様体論において codimension reduction theorem とよばれる定理が成立する [11, 39]. したがって佐々木空間形の接触磁場は 3 次元の場合に帰着する. 佐々木空間形を複素空間形の等質実超曲面として実現して部分多様体論の手法でこの定理を示すこともできる [6].

註 4.2 (傾斜曲線) 3 次元佐々木多様体においては傾斜曲線がいろいろな場面で登場する.

- 接触磁場曲線は傾斜曲線で $(\kappa_2 - 1)/\kappa_1 = \cot \theta$ をみたす [8].

- 3次元佐々木空間形 $\mathcal{M}^3(c)$ 内の (測地線でない) 重調和曲線 (biharmonic curve) は slant helix で $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 1 + (c-1)\sin^2\theta$ をみたす. 3次元佐々木空間形内の重調和曲線は [10] で分類されている.

3次元 Berger 球内の接触磁場の周期軌道は Munteanu 氏との共同研究 [31] で分類した.
まず次の事実を述べよう.

定理 4.3 $\gamma(s)$ を $\mathcal{M}^3(c)$ の接触磁場曲線とすると $\pi(\gamma(s))$ は $\mathbb{S}^2(c+3)$ の曲率が $(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1)/\kappa_1$ の円. したがって $\mathbb{S}^2(c+3)$ の Kähler 磁場曲線.

$c+3 = r^{-2}$ とおく. また $\pi(\gamma(s))$ の半径を R とすると

$$\kappa = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{rR},$$

$\pi(\gamma(s))$ の周長を L , 囲む面積を A とすると

$$L = 2\pi R, \quad A = 2\pi r(r - \sqrt{r^2 - R^2}).$$

$\gamma(s)$ は $\pi(\gamma(s))$ 上の Hopf 輪環面 T に含まれる. T は $\mathbb{R}^2/\Gamma$,

$$\Gamma = \mathbb{Z}(8r^2\pi, 0) \oplus \mathbb{Z}(A/(2r^2), L)$$

と表される. ここで $\sigma := \cot\theta$ とおくと次の主結果が得られる.

定理 4.4 ([31]) $\gamma(s)$ が周期的であるための条件は

$$R\sigma + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}\alpha.$$

系 4.1 ([8, 24]) $\mathbb{S}^3$ の接触磁場曲線 $\gamma(s)$ が周期的であるための条件は

$$\frac{q}{\sqrt{q^2 - 4q\cos\theta + 4}} \in \mathbb{Q}.$$

L -極小曲線 (ルジャンドル極小曲線, L -minimal curve) との関係にも言及しておこう. まず $\mathbb{S}^3$ の閉 L -極小曲線は次のように分類されている.

定理 4.5 ([36],[43]) $\mathbb{S}^3$ の閉 L -極小曲線は

$$\frac{1}{\sqrt{m+n}} \left(\sqrt{n} \exp(i\sqrt{m/ns}), i\sqrt{m} \exp(i\sqrt{n/ms}) \right) \subset \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{C}^2, \quad 0 \leq s \leq 2\pi\sqrt{mn}$$

と径数表示される. ただし (m, n) は互いに粗な自然数の組. これらは (m, n) 型 torus knot である.

これら Legendre ノットは接触磁場曲線であり $|q| = |n - m|/\sqrt{mn}$ をみたす. なお梶ヶ谷 [37] はこれらの Legendre ノットの不安定性を示している.

本稿では佐々木多様体のみを取り扱った. cosymplectic 多様体の接触磁場曲線については [12] を参照. また 3次元準佐々木多様体の場合は [35] 参照.

参考文献

- [1] T. Adachi, Kähler magnetic field on a complex projective space, Proc. Japan Acad. Ser. A **70**(1994), 12–13.
- [2] T. Adachi, S. Maeda, S. Udagawa, Simpliceness and closedness of circles in compact Hermitian symmetric spaces, Tsukuba J. Math. **24**(2000) 1–13.
- [3] V. I. Arnold, Some remarks on flows of line elements and frames, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **138**(1961), 255–257.
- [4] V. I. Arnold, First steps in symplectic topology, Uspekhi Mat. Nauk, 41 (1986), no. 6, 3–18. Russ. Math. Surv. **41**(1986), 1–21.
- [5] A. Arvanitoyergos and I. Chrysikos, Motion of charged particles and homogeneous geodesics in Kähler C -spaces with two isotropy summands, Tokyo J. Math. **32**(2009), 487–500.
- [6] T. Bao, T. Adachi, Circular trajectories on real hypersurfaces in a nonflat complex space form, J. Geom. **96** (2009) 41–55.
- [7] J. L. Cabrerizo, M. Fernández and J. S. Gómez, On the existence of almost contact structure and the contact magnetic field, Acta Math. Hungar. **125**(2009) (12), 191–199.
- [8] J. L. Cabrerizo, M. Fernández and J. S. Gómez, The contact magnetic flow in 3D Sasakian manifolds, J. Phys. A: Math. Theor. **42**(2009), no. 19, 195201:1–10.
- [9] J. T. Cho, J. Inoguchi, J.-E. Lee, On slant curves in Sasakian 3-manifolds, Bull. Austral. Math. Soc. **74**(2006), 359–367.
- [10] J. T. Cho, J. Inoguchi, J.-E. Lee, Biharmonic curves in 3-dimensional Sasakian space forms, Annali di Mat. Pura Appl. **186**(2007), no. 4, 685–701.
- [11] S. L. Druță-Romaniuc, J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, A. I. Nistor, Magnetic curves in Sasakian manifolds, J. Nonlinear Math. Phys. **22**(2015), no. 3, 42–447.
- [12] S. L. Druță-Romaniuc, J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, A. I. Nistor, Magnetic curves in cosymplectic manifolds, Rep. Math. Phys. **78**(2016), no. 1, 33–48.
- [13] V. L. Ginzburg, A charge in a magnetic field: Arnold’s problems 1981-9, 1982-24, 1984-4, 1994-14, 1994-35, 1996-17, and 1996-18, in Arnold’s problems, V.I. Arnold (Editor), SpringerVerlag and Phasis, 2004, pp. 395–401.
- [14] V. L. Ginzburg, New generalizations of Poincaré’s geometric theorem, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **21**(1987), no. 2, 16–22, 96.
- [15] V. L. Ginzburg, On closed trajectories of a charge in a magnetic field. An application of symplectic geometry, in: *Contact and Symplectic Geometry* (Cambridge, 1994), Publ. Newton Inst. **8**(1996), 131–148.
- [16] V. L. Ginzburg, On the existence and non-existence of closed trajectories for some Hamil-

- tonian flows, *Math. Z.* **223**(1996), no. 3, 397–409.
- [17] V. L. Ginzburg, B. Z. Gürel, Relative Hofer–Zehnder capacity and periodic orbits in twisted cotangent bundles, *Duke Math. J.* **123**(2004), no. 1, 1–47.
 - [18] V. L. Ginzburg, B. Z. Gürel, Periodic orbits of twisted geodesic flows and the Weinstein–Moser theorem, *Comment. Math. Helv.* **84**(2009), no. 4, 865–907.
 - [19] N. Gouda, Magnetic flows of Anosov type, *Tôhoku Math. J.* **49**(1997), 165–183.
 - [20] N. Gouda, The theorem of E. Hopf under uniform magnetic fields, *J. Math. Soc. Japan* **50**(1998), no. 3, 767–779.
 - [21] O. Ikawa, Hamiltonian dynamics of a charged particle, *Hokkaido Math. J.* **32** (2003) 661–671.
 - [22] O. Ikawa, Motion of charged particles in Kähler C -spaces, *Yokohama Math. J.* **50**(2003) 31–39.
 - [23] O. Ikawa, Motion of charged particles in homogeneous spaces, in: *Proc. of the Seventh International Workshop on Diff. Geom.* **7**(2003) 29–40.
 - [24] O. Ikawa, Motion of charged particles in homogeneous Kähler and homogeneous Sasakian manifolds, *Far East J. Math. Sci.* **14**(2004) 283–302.
 - [25] O. Ikawa, Motion of charged particles in two-step nilpotent Lie groups, *J. Geom. Sym. Phys.* **4**(2005) 1–12.
 - [26] O. Ikawa, Motion of charged particles in Sasakian manifolds, *SUT J. Math.* **43**(2007) 263–266.
 - [27] O. Ikawa, Motion of charged particles from the geometric view point, *J. Geom. Sym. Phys.* **18**(2010) 23–47.
 - [28] O. Ikawa, Motion of charged particles in two-step nilpotent Lie groups, *J. Geom. Symmetry Phys.* **20**(2010), 57–67.
 - [29] J. Inoguchi, 3次元接触多様体の部分多様体論, 京都大学数理解析研究所講究録, 1880(2014), “部分多様体の微分幾何学の深化”, 72–99.
 - [30] J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, Magnetic maps, *Internat. J. Geom. Methods in Modern Physics* **11** (2014), no. 6, Article ID 450058[22 pages].
 - [31] J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, Periodic magnetic curves in Berger spheres, *Tôhoku Math. J.*, to appear.
 - [32] J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, New example of magnetic maps and tangent bundles, *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Trino*, to appear.
 - [33] J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, Magnetic curves in tangent sphere bundles, in preparation.
 - [34] J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, Magnetic endomorphism fields, in preparation.
 - [35] J. Inoguchi, M.-I. Munteanu, A. I. Nistor, Magnetic curves in quasi-Sasakian 3-manifolds, submitted.
 - [36] H. Iriyeh, Hamiltonian minimal Lagrangian cone in $\mathbf{C}^m$, *Tokyo J. Math.* **28**(2005), no. 1,

91–107.

- [37] T. Kajigaya, Second variational formula and the stability of Legendrian minimal submanifolds in Sasakian manifolds, *Tôhoku Math. J.* **65**(2013), no. 4, 523–543.
- [38] D. Kalinin, Trajectories of charged particles in Kähler magnetic fields, *Rep. Math. Phys.* **39**(1997), 299–309.
- [39] M. I. Munteanu, A. I. Nistor, A note on magnetic curves on $\mathbb{S}^{2n+1}$, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **352**(2014), no. 5, 447–449.
- [40] M. Schneider, Closed magnetic geodesics on S^2 , *J. Differential Geom.* **87**(2011), no. 2, 343–388.
- [41] M. Schneider, Alexandrov embedded closed magnetic geodesics on S^2 , *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **32**(2012), no. 4, 1471–1480.
- [42] M. Schneider, Closed magnetic geodesics on closed hyperbolic Riemann surfaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **105**(2012), no. 2, 424–446.
- [43] R. Schoen, J. Wolfson, Minimizing area among Lagrangian surfaces: The mapping problem, *J. Differential Geom.* **58**(2001), no. 1, 1–86.
- [44] T. Sunada, Magnetic flows on a Riemann surface, *Proceedings of KAIST Mathematics Workshop*, 1993, 93–108.
- [45] I. A. Taimanov, Periodic magnetic geodesics on almost every energy level via variational methods, *Regular and Chaotic Dynamics* **15**(2010), 4-5, 598–605.
- [46] C. H. Taubes, The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture, *Geom. Topol.* **11**(2007), 2117–2202.
- [47] W. M. Thurston, *Three-dimensional Geometry and Topology I*, Princeton Math. Series., vol. **35** (S. Levy ed.), 1997.
- [48] A. Weinstein, On the hypotheses of Rabinowitz’ periodic orbit theorems, *J. Differ. Eq.* **33**(1979), 353–358.