# 無限ネットワークの可解理想境界

加須栄篤（金沢大学）

## はじめに

本講演では、無限グラフ上の $p$-ディリクレ有限 $p$-調和関数とコンパクト化・理想境界について議論する。前半では、 双曲空間に埋め込まれたグラフと双曲境界について、後半では、ロイデンタイプのコンパクト化とディリクレ問題について数年前の研究で得られた成果を述べ、そのあとネットワーク《重み付きグラフ》への展開に関する最新の研究について簡単に触れる。

## 1　双曲空間に埋め込まれたグラフと双曲境界

**1.1**　まず状況設定から行う。考える対象は　無限グラフ $G = (V, E)$ である。$V$ は頂点集合 (可算無限と仮定する）$E$ は辺の集合を表す。 頂点 $x, y \in V$ に対して $\{x, y\} \in E$ のとき $x \sim y$ と表す．$x$ と $y$ は隣接するという。任意の 2 点 $x,\ y$ をとると，それらを繋ぐ道があるとき、グラフは連結であるという．以下連結グラフを考える。各辺の長さを 1 とすることによって，道の長さが定まり、2 点 $x, y$ を繋ぐ最短な道の長さによって距離が定まる。これをグラフ距離といい、この距離によってグラフを距離空間と考える。頂点 $x$ に隣接する頂点の集合 $\{y \in V \mid x \sim y\}$ は、頂点 $x$ を中心とした半径 1 の距離球と同じであるが、この集合の元の個数を頂点 $x$ の次数 $\deg(x)$ という。以下各頂点の次数は有限であると仮定する、すなわち、次数局所有界な連結グラフを考える。

次に指数 $p \in (1, \infty)$ を固定する。$V$ 上の関数 $f$ に対して $f$ の $p$-ディリクレ和を

$$D_p(f) = \frac{1}{2}\sum_{x\sim y} |f(y) - f(x)|^p.$$

によって定める。$L^{1,p}(G) := \{f \mid D_p(f) < \infty\}$ は、ノルム $D_p(f)^{1/p} + |f(o)|$ に関してバナッハ空間である．(ただし $o \in V$ は固定点を表す。) $L^{1,p}_0(G) := \overline{\{f \mid f \text{ の台は有限個の頂点からなる }\}}^{D_p^{1/p}+\delta_o}$ によって $L^{1,p}(G)$ の閉部分空間を定義する。関数 $f$ の $p$-ラプラシアンを

$$\mathcal{L}_p f(x) := \sum_{y\sim x} |f(x) - f(y)|^{p-2}(f(x) - f(y)), \quad x \in V$$

と定める。 $\mathcal{L}_p f = 0, \geq 0, \leq 0$ を満たすとき, $f$ はそれぞれ $p$-調和、$p$-優調和、$p$-劣調和であるという．$L^{1,p}(G)$ の閉部分集合

$$HL^{1,p}(G) := \{f \in L^{1,p}(G) \mid \mathcal{L}_p f = 0\}$$

に興味がある。$p = 2$ のときには線形部分空間であり、ヒルベルト空間になるが、$p \neq 2$ のときはそれは当てはまらない。ただし $p$-調和関数のスカラー倍も $p$-調和である。

**定義・定理** $G$ が $p$-非放物的である $\Leftrightarrow$ 定数ではない正値 $p$-優調和関数が存在する $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in V$ に対して

$$\mathrm{cap}^{(p)}(x) := \inf\{D_p(u) \mid u(x) = 1, u \in L_0^{1,p}(G)\} \quad > 0$$

なお、 $p = 2$ のとき、(2-) 非放物的でることと、ランダムウォークが非再帰的であることは同値であることがよく知られている。

$1 < p < q$ に対して, $G$ が $q$-非放物的ならば $p$-非放物的であることが成り立つ。これから $\sup\{p \mid G$ は $p-$ 非放物的である $\}$ を $G$ の放物指数とよぶ。この数が具体的に求められる例を後で紹介する。

**1.2** ここで 2 つの概念 quasi monomorphism ([1]) と quasi isometry (Gromov), rough isometry ([10]) を説明する。

**定義** 距離空間 $(X, d_X)$ から $(Y, d_Y)$ への写像 $\phi : X \to Y$ が **quasi monomorphism** であるとは，次の 2 つの条件を満たす時を言う。

(i) ある正の数 $a, b$ があって、任意の $x, x' \in X$ に対して $d_Y(\phi(x), \phi(x')) \leq a d_X(x, x') + b$ が成り立つ。

(ii) 任意の $r > 0$ に対して, ある正の整数 $k$ が見つかって、任意の $y \in Y$ を中心とする半径 $r$ のボール $B_Y(y, r)$ の逆像 $\phi^{-1}(B_Y(y, r))$ が $k$ 個の $X$ の半径 $r$ のボールで覆われる。

**定義** 距離空間 $(X, d_X)$ から $(Y, d_Y)$ への写像 $\phi : X \to Y$ が **quasi isometry** (あるいは **rough isometry**) であるとは，次の 2 つの条件を満たす時を言う。

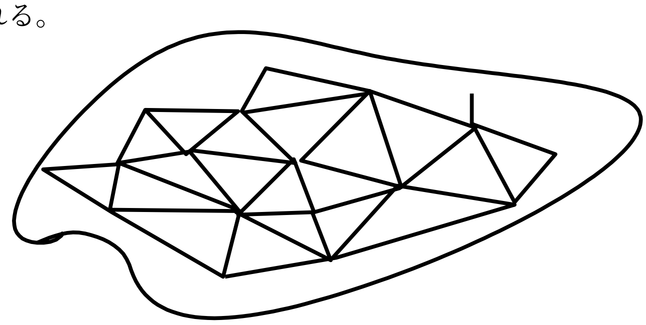
(i) ある $a \geq 1$ と $b > 0$ が存在して、任意の $x, x' \in X$ に対して
$a^{-1} d_X(x, x') - b \leq d_Y(\phi(x), \phi(x')) \leq a d_X(x, x') + b$ が成り立つ。

(ii) ある正の数 $c$ が見つかって、任意の $y \in Y$ に対して, $d_Y(y, \phi(x)) \leq c$ を満たす $x \in X$ が存在する。

明らかに quasi isometry は quasi monomorphism である。また、quasi monomorphism の合成は quasi monomorphism となる.

以下この節では、次数有界なグラフ $G = (V, E)$ とリッチ曲率が下から有界かつ単位球体の体積が一様に下から正の数で抑えられる完備リーマン多様体 $M = (M, g_M)$ を合わせて考えてみる。有界幾何の世界である。

$M$ の極大 $\varepsilon$-分離集合 $V$ を取り，$\{x, y\} \in E \Leftrightarrow d_M(x, y) \le 3\varepsilon$ によって辺集合 $E$ を定めることによって次数有界なグラフ $G = (V, E)$ が得られる。$M$ の $\varepsilon$-ネットという．　このとき，$G = (V, d_G)$ と $M = (M, d_M)$ は quasi isometry である。また次数有界なグラフ $G = (V, E)$ から、qusi isometry の中でリッチ曲率が下から有界、かつ単位球体の体積が一様に下から正の数で抑えられる完備リーマン多様体が得られる。たとえば $\boldsymbol{Z}^3$ からジャングルジム (の表面）が得られる。



以下、有界幾何の世界で quasi isometry で不変な性質をいくつか列挙する。

(i)　( [10], [14], [9], [8])　　$G_1$ と $G_2$ が quasi isometry のとき，$G_1$ が $p$-放物的ならば $G_2$ も $p$-放物的である。$G$ を上記リーマン多様体に替えてもこれが成り立つ。すなわち $p$-放物性は quasi isometry で不変である。

(ii) ([10], [13])　$\lambda^{(p)}(G) := \inf\{D_p(f)/\sum_{x\in V}|f(x)|^p \mid f \in L_0^{1,p}(G)\}$ とおく。このとき、次の条件はみな同値である。

(ii-a) $G$ において強等周不等式が成り立つ（Cheeger 定数 $h(G) > 0$)

(ii-b) すべての $p > 1$ に対して，$\lambda^{(p)}(G) > 0$

(ii-c) ある $p > 1$ に対して，$\lambda^{(p)}(G) > 0$

また、これらが成り立つとき、$G$ はべての $p > 1$ に対して $p$-非放物的である。すなわち放物指数は無限大である。

このように強等周不等式の成立や $\lambda^{(p)}(G)$ の正値性は 有界幾何の世界で quasi isometry で不変な性質である。

(iii) ([6])

(iii-a)　$G_1$ と $G_2$ が quasi isometry のとき，$HL^{1,p}(G_1) \cong HL^{1,p}(G_2)$ となる。

(iii-b)　$G$ と $M$ が quasi isometry のとき $HL^{1,p}(G) \cong HL^{1,p}(M)$ となる。

**例**　(1) ユークリッド空間　$\boldsymbol{R}^n$ は, $1 < p < n$ のとき、またそのときに限り $p$-非放物的である。特に放物指数は $n$ である。どの指数でも $HL^{1,p}(\boldsymbol{R}^n) = \boldsymbol{R}$ となる。

(2) 双曲空間形 $\boldsymbol{H}^n$ においては強等周不等式が成り立ち、したがって $\lambda^{(p)}(\boldsymbol{H}^n) > 0$ である。また、$1 < p \le n-1$ のとき、またその時に限り $HL^{1,p}(\boldsymbol{H}^n) = \boldsymbol{R}$ がなりたつ。$n-1 < p$ の $HL^{1,p}(\boldsymbol{H}^n)$ については、下で述べる定理１を参照。

(3)　直積 $\boldsymbol{H}^m \times \boldsymbol{R}^n$ においては、すべての $1 < p < +\infty$ に対して、$\lambda^{(p)}(\boldsymbol{H}^m \times \boldsymbol{R}^n) > 0$ であり、$HL^{1,p}(\boldsymbol{H}^m \times \boldsymbol{R}^n) = \boldsymbol{R}$ となる。

(4) ワープト積 $\boldsymbol{R}^n \times_{\cosh r} \boldsymbol{R}$, $g = g_E + (\cosh r)^2 dt^2$ の場合は、すべての $1 < p < +\infty$ に対して、$\lambda^{(p)}(\boldsymbol{H}^m \times \boldsymbol{R}^n) > 0$ であるが、一方 $HL^{1,p}(\boldsymbol{R}^n \times_{\cosh r} \boldsymbol{R}) \neq \boldsymbol{R}$ である。曖昧な表現であるが、$n \geq 2$ のとき、理想境界として有限区間を付け加え、そこでのディリクレ境界値問題に対して $HL^{1,p}(\boldsymbol{R}^n \times_{\cosh r} \boldsymbol{R})$ の関数が解となる。$n = 1$ の場合は、$\boldsymbol{R} \times_{\cosh r} \boldsymbol{R} = \boldsymbol{H}^2$ であり、上述の理想境界は有限区間ではなく円周である。([2] 参照)。

二乗可積分な調和1形式の非存在について部分多様体の幾何でも研究されている。例えば、極小超曲面の安定性との関連がある。有限全曲率をもつ部分多様体も取り上げられている。最新の文献では [3] [5] がある。しかし $p \neq 2$ の研究はあるのだろうか？

**定理 1.** *([7])* 次数有界なグラフ $G = (V, E)$ から双曲空間形への *quasi monomorphism* $\phi : G \to \boldsymbol{H}^n$ が存在し，$p > n-1$ に対して, $G$ は $p$-非放物的とする。このとき，$G$ 上定数ではない $p$ - ディリクレ有限 $p$ - 調和関数が存在する。実際極限集合 $\Lambda(\phi) = \overline{\phi(V)} \cap \partial_\infty \boldsymbol{H}^n$ のある完全部分集合 $\Sigma$ が存在して，$\Sigma$ 上のリプシッツ関数 $\eta$ を境界値とする $p$ - ディリクレ有限 $p$ - 調和関数 $h$ が一意的に存在する:

$$\lim_{\phi(x)\to\xi} h(x) = \eta(\xi),\ \xi \in \Sigma$$

**注意** (i) $\lambda^{(p)}(G) > 0$ ならば, $\Sigma = \Lambda(\phi)$ であることが判る。

(ii) ホロ球面 $\boldsymbol{R}^{n-1} \subset \boldsymbol{H}^n$ を考える。 包含写像 $\phi : \boldsymbol{Z}^{n-1}(\subset \boldsymbol{R}^{n-1}) \subset \boldsymbol{H}^n$, は明らかに quasi monomorphism である。この場合 $\Lambda(\phi) = \{$ 一点 $\}$ である。一方ナッシュの埋め込み定理から、有界幾何の世界のリーマン多様体はユークリッド空間に埋め込める。この埋め込みは quasi monomorphism の1番目の条件を満たす。リプシッツ定数1の埋め込みである。しかし2番目の条件を満たすとは限らない。実際大きな指数で $HL^{1,2}(M)$ が自明ではない場合は決して2番目の条件を満たさないことが、定理1から判る。例えば双曲空間を大きな次元のユークリッド空間に等長に埋め込だとき、quasi monomorphism には決してならず、埋め込みの様子は”複雑である”ことになる。

定理1に関連した例を提示しよう。

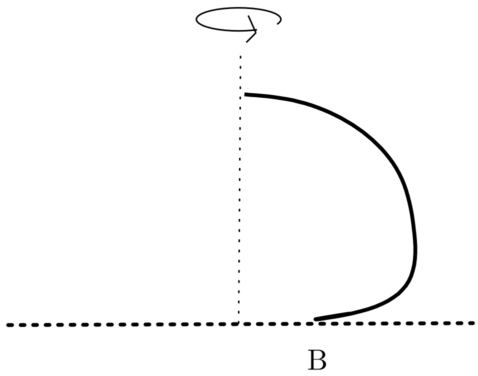
**例** 3次元双曲空間 $\boldsymbol{H}^3 = (\{(x, y, z) \mid z > 0\}, (dx^2 + dy^2 + dz^2)/z^2)$ の中の回転面 $S = \{(\tau(z)\cos\theta, \tau(z)\sin\theta, z) \mid 0 < z < a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ を考える。

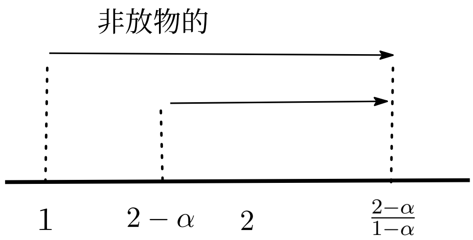
$$\tau(z) = Az^\alpha + B,\ A > 0,\ B > 0,\ 0 < \alpha < 1$$

のようにプロフィール関数 $\tau$ を選ぶと、包含写像 $\phi : S \subset \boldsymbol{H}^3$ は quasi monomorphism であることが確かめられ、明らかに $\Lambda(\phi) = \{B(\cos\theta, \sin\theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ である。

(i) $1 < p < (2-\alpha)/(1-\alpha)$ ならば、リーマン曲面 $S$ は $p$-非放物的である。

(ii) $1 < 2 - \alpha < p < (2-\alpha)/(1-\alpha)$ ならば、$HL^{1,p}(S) \neq \boldsymbol{R}$ となり、実際定理1の条件 $2 < p < (2-\alpha)/(1-\alpha)$ は改良されている。(定理1は、条件 $p > n-1$ の部分は改良される余地がある。)




## 2　ロイデンタイプのコンパクト化とディリクレ問題

この節では、空間 $L^{1,p}(G)$ に結びついたコンパクト化に関するポテンシャル論を紹介する。

$BL^{1,p}(G)$ （$B$ は有界性を表している）の部分集合 $\Gamma$ が与えられている。この時、コンパクトハウスドルフ空間 $\mathcal{K}_\Gamma$ で、つぎに性質を満たすものが同相を除いて一意的に存在する。

(i)　$V$ は $\mathcal{K}_\Gamma$ の稠密開集合である。

(ii) $\Gamma$ の元はすべて $\mathcal{K}_\Gamma$ 上の連続関数に拡張し，かつ拡張された連続関数たちは境界 $\partial\mathcal{K}_\Gamma = \mathcal{K}_\Gamma \setminus V$ の 2 点を分離する。

$\Gamma = BL^{1,p}(G)$ のとき，$\mathcal{R}^{(p)}(G)$ と表して，ロイデン $p$-コンパクト化という。このとき、次のことに注意する。恒等写像 $i: V \to V$ は、上への連続写像 $\pi_\Gamma : \mathcal{R}^{(p)}(G) \to \mathcal{K}_\Gamma$ に拡張される。

ここでロイデン境界の重要な部分である調和境界を導入する。

$$\Delta^{(p)}(G) := \{x \in \partial\mathcal{R}^{(p)}(G) \mid u(x) = 0,\ \forall u \in L_0^{1,p}(G)\}$$

なお、$G$ は $p$-非放物的であることと、$\Delta^{(p)}(G) \neq \emptyset$ は同値であることが知られている。

$\mathcal{K}_\Gamma$ の境界部分 $\partial\mathcal{K}_\Gamma$ の中の調和境界にあたる部分 $\Delta_\Gamma := \pi_\Gamma(\Delta^{(p)}(G)) \subset \partial\mathcal{K}_\Gamma$ が重要である。

**命題 2.** $\xi \in \Delta_\Gamma \Longleftrightarrow \exists\{x_n\} \subset V,\ x_n \to \xi\ in\ \mathcal{K}_\Gamma,\ \liminf_{n\to\infty} \mathrm{cap}^{(p)}(x_n) > 0$

ここで $\partial\mathcal{K}_\Gamma$ 上のディリクレ問題を解くためのペロンの方法を紹介する。

$V$ 上の関数 $g$ が与えられている。

**定義**　境界 $\partial\mathcal{K}_\Gamma$ 上の拡張された連続関数 $\phi$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\inf_V u > -\infty,\\
&\mathcal{L}_p u + g \geq 0,\\
&\liminf_{y\in V\to\xi} u(y) \geq \phi(\xi) \quad \text{for all } \xi \in \partial\mathcal{K}_\Gamma.
\end{aligned}
$$

を満たす $V$ 上の関数 $u$ の集合を $\overline{\mathcal{F}}_\phi$ と記し、

$$\overline{\mathcal{H}}_g\phi(x) = \inf\{u(x) \mid u \in \overline{\mathcal{F}}_\phi\}, \quad x \in V.$$

によって $\overline{\mathcal{H}}_g\phi$ を定める。

次に

$$
\begin{aligned}
&\sup_V v < +\infty,\\
&\mathcal{L}_p v + g \leq 0,\\
&\limsup_{y\in V\to\xi} v(y) \leq \phi(\xi) \quad \text{for all } \xi \in \partial\mathcal{K}_\Gamma
\end{aligned}
$$

を満たす関数 $v$ の集合を $\underline{\mathcal{F}}_\phi$ と記し、

$$\underline{\mathcal{H}}_g\phi(x) = \sup\{v(x) \mid v \in \underline{\mathcal{F}}_\phi\}, \quad x \in V.$$

によって $\underline{\mathcal{H}}_g\phi$ を定める。

もし $\overline{\mathcal{H}}_g\phi = \underline{\mathcal{H}}_g\phi$ ならば、$\mathcal{H}_g\phi = \overline{\mathcal{H}}_g\phi$ とおき、$\mathcal{H}_g\phi$ が有限の値をとるならば, $\phi$ は (方程式 $\mathcal{L}_r u + g = 0$ に関して) **可解**であるという。$\mathcal{H}_g\phi$ を**ペロン解**という。

**定理 3.** グラフ $G = (V, E)$ は $p$-非放物的とする。$V$ 上の関数 $g$ に対して，$\mathcal{L}_p v + g = 0$ を満たす $v \in L^{1,p}(G)$ が存在すると仮定する。この時、境界 $\partial\mathcal{K}_\Gamma$ 上の任意の連続関数 $\phi$ は可解である。さらに すべての連続関数 $\phi, \psi \in C(\partial\mathcal{K}_\Gamma)$ に対して、

$$|\mathcal{H}_g\phi(x) - \mathcal{H}_g\psi(x)| \leq \sup_{\Delta_\Gamma} |\phi - \psi| \quad \forall x \in V$$

が成り立つ。

上の定理では『$V$ 上の関数 $g$ に対して，$\mathcal{L}_p v + g = 0$ を満たす $v \in L^{1,p}(G)$ が存在する』と仮定されている。この仮定について考えてみる。

**例** $g = 0$ ならば, $v = 0$ が一つの解である。

**例** 次数有界なグラフの場合、（$g = 1$ として）$\mathcal{L}_p v + 1 = 0$ を満たす $v \in L^{1,p}(G)$ は見つからない。

これを説明するために

$$\mu_p(x) := \deg(x)^{-p/(p-1)}, \quad x \in V$$

とおく。

**命題 4.** *(1)* $v \in L^{1,p}(G)$ に対して、

$$\sum_{x \in V} |\mathcal{L}_p v(x)|^{p/(p-1)} \mu_p(x) < +\infty$$

となる。

*(2)* $\lambda^{(p)}(G) > 0$ のとき，

$$\sum_{x \in V} |g(x)|^{p/(p-1)} \mu_p(x) < +\infty$$

を満たす関数 $g$ に対して，$\mathcal{L}_p v + g = 0$ を満たす $v \in L^{1,p}(G)$ が存在する。

**注意** この命題で主張している事実は、リーマン多様体ではどの程度のことが分かっているのであろうか？ 有界幾何の世界で考えて、quasi-isometry で不変な性質かどうかまだ検討されていない（と思う）。

さて、コンパクト化を考える際、以下の 2 つの性質を考える。

[I] $\Gamma$ は $BL^{1,p}(G)$ において稠密である。

[II] $\Gamma$ の中の関数列 $\{f_n\}$ で、一様位相で稠密なものが取れる: $\Gamma \subset \overline{\{f_n\}}^{C^0}$

**定理 5.** [I] を仮定する。

*(1)* $L^{1,p}(G)$ の関数 $u$ はすべて *quasi continuous function* $\tilde{u}$ として $\mathcal{K}_\Gamma$ 上に拡張する。

*(2)* （比較原理）$u, v \in L^{1,p}(G)$ に対して，

$\tilde{u} \le \tilde{v}$ *quasi everywhere on* $\partial\mathcal{K}_\Gamma$

$\mathcal{L}_p u \le \mathcal{L}_p v$ *in* $V$

ならば　$u \le v$ *in* $V$ が成り立つ。

無限遠方に発散する道　$c : \mathbf{Z}^+ \to V$ （$c(i) \sim c(i+1)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$）の集合 $\mathcal{P}_\infty$ を考える。道の集合 $\mathcal{P}$ には、極値的長さ (extremal length)$E^{(p)}(\mathcal{P})$ が決まり、$E^{(p)}(\mathcal{P}) = +\infty$ となるような道の集合 $\mathcal{P}$ は『無視できる』と考える。例えば、$\mathcal{P}_{x,\infty} = \{c \in \mathcal{P}_\infty \mid c(0) = x\}$ とすると、

$$E^{(p)}(\mathcal{P}_{x\infty}) = \frac{1}{\mathrm{cap}^{(p)}(x)}$$

と表すことができるので、$\mathcal{P}_{x,\infty}$ は『無視できない』集合である。

**定理 6.** $G = (V, E))$ $p$-非放物的グラフで、関数族 $\Gamma$ に対して *[II]* を仮定する。

*(i)* $\mathcal{K}_\Gamma$ は距離付け可能である。

*(ii)* ほとんどの道 $c \in \mathcal{P}_\infty$ に対して，$c(i)$ は $i \to \infty$ とすると，$\Delta_\Gamma(= \pi_\Gamma(\Delta^{(p)}(G)))$ の点 $c(\infty)$ に収束する。

*(iii)* $g$ は $V$ 上の関数で、$\mathcal{L}_p v + g = 0$ を満たす $v \in L^{1,p}(G)$ が存在すると仮定する。このとき、任意の連続関数 $\phi : \partial\mathcal{K}_\Gamma \to \mathbf{R}$ に対して

$$\lim_{i\to\infty} \mathcal{H}_g\phi(c(i)) = \phi(c(\infty))$$

がほとんどすべての道 $c \in \mathcal{P}_\infty$ に対して成り立つ.

**注意**　この定理で主張している事実 (ii) や (iii) は、リーマン多様体でも成り立つのであろうか？

上記の 2 つの性質 [I], [II] を満たすコンパクト化を紹介してこの節を終えるする。

**定義** - $p$-**倉持コンパクト化** -　$V$ の部分集合 $U$ に対して

$$\mathcal{V}(U) = \{u \in L^{1,p}(G) \mid u(x) = 0 \quad \forall x \in U\}$$

とおく。このとき、任意の $f \in L^{1,p}(G)$ に対して、次のような関数 $f_U$ が一意的に存在することが分かる。

$$f_U(x) = f(x) \qquad x \in U;$$

$$D_p(f_U) \le D_p(f+v) \qquad \forall v \in \mathcal{V}(U)$$

そこで

$$\mathcal{K}(U) := \{f_U \mid f \in L^{1,p}(G)\}$$

とおくと、$U \subset W$ ならば、$\mathcal{K}(U) \subset \mathcal{K}(W)$ であることに注意して、次のような関数族を定める。

$$\Gamma_K = \cup\{\mathcal{K}(U) \mid \text{有限部分集合 } U \subset V\}$$

この関数族に関するコンパクト化を $p$-倉持コンパクト化と呼ぶ。上記の 2 つの性質 [I], [II] を満たすコンパクト化である。

**注意**　もしグラフがツリーのとき、倉持コンパクト化、エンドコンパクト化、さらに $p = 2$ のときにはマルチンコンパクト化は位相的には一致している。

## 3　重み付きグラフ-ネットワーク-の導入

De Michele - Soardi [4] において, "nonlinear networks in the framework of modular sequence spaces" が導入され、[15] や [16] において少し研究がなされた。この設定を概略のみ紹介する。

局所有限連結グラフ $G = (V, E)$ を考える。各有向辺 $[x, y] \in E^o$ $(x, y \in V)$ に電位差 $v([x, y])$ と $[x, y]$ を流れる電流 $I([x, y])$ との間に関係

$$v([x, y]) = r_{[x,y]}(I([x, y]))$$

があるとする。ここで $r_{[x,y]}(t)$ は、$\mathbf{R}$ 上の連続、単調増大な奇関数で、$t \to \infty$ のとき無限に発散することが仮定されている。レジスタンス関数という。さらにこの関数たちは、ある種の一様性が要請されている【省略】。次に $r_{[x,y]}(t)$ の逆関数，　コンダクタンス関数 $r^{-1}_{[x,y]}(t)$ を用いて関数のエネルギーが次のように定義する。

$$W^*(du) = \sum_{\{x,y\}\in E} \int_0^{|u(x)-u(y)|} r^{-1}_{\{x,y\}}(t)\ dt.$$

$L(G,r)$ でもって $W^*(du)$ が有限となる $V$ 上の関数全体を表す。適当なノルムでバナッハ空間になることが知られている。与えられた関数 $g : V \to \mathbf{R}$ から、汎関数 $u \to W^*(du) + \sum_{x\in V} g(x)u(x)$ を考えると、その局所最小性を与える関数は非線形ポアソン方程式:

$$\mathcal{L}_r u + g = 0,$$

を満たす。ここに

$$\mathcal{L}_r u(x) = \sum_{\{x,y\}\in E} r^{-1}_{\{x,y\}}(u(x) - u(y)), \quad x \in V,$$

例として、指数を辺ごとに変化させるものがある。$p : E \to [a,b]$ $(1 < a < b < +\infty)$ と $c : E \to (0,+\infty)$ を与え、各辺 $e = \{x,y\}$ に対して、抵抗関数が $r_e^{-1}(t) = c(e)\mathrm{sign}\ (t)\ |t|^{p(e)-1}$ によって与えられたネットワークである。$p$ の動く範囲を有界区間に限定しているので、要請されている一様性が満たされている。

第 2 節で述べたようなポテンシャル論がこのような広い枠組みのネットワークでも成り立つ。[11], [12] 参照。

## References


[1] I. Benjamini and O. Schramm: Harmonic functions on planar and almost planar graphs and manifolds, via circle packings, Invent math. **126** (1996), 565–587.

[2] S. M. Buckley and S. L. Kokkendorff, Warped products and conformal boundaries of CAT(0)-spaces, J. Geom. Anal. **18** (2008), 704–719.

[3] M.P. Cavalcante, H. Mirandola and F. Vitorio: $L^2$ harmonic 1-forms on submanifolds with finite total curvature, J. Geom. Anal. **24** (2014) 205-222.

[4] L. De Michele and M.P. Soardi: A Thomson's principle for nonlinear,infinite resistive networks, Proc. Amer. Math. Soc. **109**, 461–468 (1990)

[5] N.T. Dung and K. Seo: Vanishing theorems for $L^2$ harmonic 1-forms on complete submanifolds in a Riemannian manifold, J. Math. Anal. Appl. **423** (2015) 1594-1609.

[6] T. Hattori and A. Kasue: Dirichlet finite harmonic functions and points at infinity of graphs and manifolds, Proc. Japan Acad. **83**, Ser. A, No.7 (2007), 129–134.

[7] T. Hattori and A. Kasue: Functions with finite Dirichlet sum of order $p$ and quasi-monomorphisms of infinite graphs, Nagoya Math. J. **207** (2012), 95-138.

[8] I. Holopainen: Rough isometries and $p$-harmonic functions with finite Dirichlet integral, Rev. Math. Iberoamericana **10** (1994), 143–176.

[9] I. Holopainen and P. M. Soardi: $p$-harmonic functions on graphs and manifolds, Manuscripta Math. **94** (1997), 95–110.

[10] M. Kanai: Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of non-compact Riemannian manifolds, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 391–413.

[11] A. Kasue: A Thomson's principle and a Rayleigh's monotonicity law for nonlinear networks, Potential Anal. published online:25 May 2016

[12] A. Kasue: Resolutive ideal boundaries of nonlinear resistive networks, to appear

[13] L. Saloff-Coste, Analysis on Riemannian co-compact covers, Surveys in Differential Geometry IX, International Press (2004), 351–384.

[14] P.M. Soardi: Potential Theory on Infinite Networks, Lecture Notes in Math. **1590**, Springer-Verlag, 1994.

[15] P.M. Soardi: Morphisms and currents in infinite nonlinear resistive networks, Potential Anal. **2**, 315–347 (1993)

[16] A.H. Zemanian: Infinite Electrical Networks, Cambridge Tract in Mathematics vol 101, Cambridge Univ. Press (1991)