ラグランジュ平均曲率流とシンプレクティック面積
Lagrangian mean curvature flow and symplectic area

赤穂まなぶ
首都大学東京 大学院理工学研究科 数理情報科学専攻

1. はじめに

本稿では, ケーラー・アインシュタイン多様体のなかの, 平均曲率流方程式に従って変形するラグランジュ部分多様体の族を考え, それらに境界値をもつ, 境界付きリーマン面からの滑らかな写像のシンプレクティック面積の振る舞いを詳しく調べる. またその応用としてケーラー・アインシュタイン多様体における単調ラグランジュ部分多様体の平均曲率流方程式に従う変形とフレアー理論との関係について一考察を述べる.

2. 平均曲率流

以下では平均曲率ベクトルが必要なので, M をリーマン多様体とする.

定義 2.1. (平均曲率流方程式) $f : N \to M$ をはめ込み, $\{f_t : N \to M\}_{t\in[0,T)}$ をはめ込みの滑らかな族とする. このとき

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} f_t &= H_t, \\ f_0 &= f \end{cases}$$

を平均曲率流方程式とよぶ. ただし H_t は $f_t : N \to M$ の平均曲率ベクトル場である.

本稿では f_t が**埋め込み**の場合を考える.

一般に平均曲率流方程式は, 時間パラメーター t について $t = +\infty$ まで解が存在するとは限らない. そこで次のような量を導入する.

定義 2.2. 平均曲率流方程式において初期値 $f : N \to M$ が埋め込みであるとする. このとき $T_e \in [0, +\infty]$ を次で定義する:

$$T_e := \sup_T \left\{ T \in [0, +\infty] \;\middle|\; \begin{array}{l} \{f_t : N \to M\}_{t\in[0,T)} \text{は平均曲率流} \\ \text{方程式の解で各 } f_t \text{ は埋め込み.} \end{array} \right\}$$

3. シンプレクティック幾何からの準備

定義 3.1. (平均曲率形式) M をシンプレクティック多様体, ω をそのシンプレクティック形式とし, M 上には適当なリーマン計量を定めておく. ま

た L を M のラグランジュ部分多様体とする．このとき L の平均曲率ベクトル場 H に対し, 平均曲率形式 σ を

$$\sigma = \omega(H, \cdot)$$

で定義する．σ は L 上の 1 次微分形式である．

定義 3.2. **(マスロフ指数)** (M, ω) を実 $2n$ 次元シンプレクティック多様体, L を M のラグランジュ部分多様体とする．また, Σ をコンパクトな境界付きリーマン面とし, ここでは話を簡単にするために境界 $\partial\Sigma$ は S^1 と同相とし, $\partial\Sigma$ には Σ から誘導される自然な向きを考える．そして $u : \Sigma \to M$ を $u(\partial\Sigma) \subset L$ を満たす滑らかな写像とする．このとき

- u^*TM は Σ 上の自明なシンプレクティックベクトル束 $\Sigma \times \mathbb{C}^n$ と同型になる．
- その自明化を $\partial\Sigma$ に制限したとき, u^*TL は $\partial\Sigma$ の各ファイバーにおいて $\mathbb{C}^n$ のラグランジュ部分空間を定める．これにより $\partial\Sigma \cong S^1$ からラグランジュ・グラスマン多様体への写像が得られる．ただしここでラグランジュ・グラスマン多様体とは, $\mathbb{C}^n$ のなかの向きをつけないラグランジュ部分空間のなす集合とする．
- ラグランジュ・グラスマン多様体の基本群は $\mathbb{Z}$ と同型であり, $\partial\Sigma$ からラグランジュ・グラスマン多様体への写像の表す基本群の元, もしくは整数を $\mu(u)$ と書く．

この $\mu(u)$ を u のマスロフ指数とよぶ．マスロフ指数は u のホモトピー不変量である．

定理 3.3. **(K. Cielieback–E. Goldstein [2], H.Ono [6])** (M, ω) をケーラー・アインシュタイン多様体で, リッチ形式 ρ が $\rho = \lambda\omega$ となっているものとする．また L を M のラグランジュ部分多様体とする．次に Σ を境界付きコンパクトなリーマン面とし, 境界 $\partial\Sigma$ は S^1 と同相とする．そして $u : \Sigma \to M$ を $u(\partial\Sigma) \subset L$ を満たす滑らかな写像とする．このとき次の等式が成り立つ．

$$\lambda \int_\Sigma u^*\omega - \pi\mu(u) = \int_{\partial\Sigma} u^*\sigma.$$

4. ラグランジュ平均曲率流とシンプレクティック面積

ここではケーラー・アインシュタイン多様体のなかの平均曲率流にしたがって変形するラグランジュ部分多様体の族と, 境界付きリーマン面からの写像のシンプレクティック面積との関係について考察する．

以下では (M,ω) をケーラー・アインシュタイン多様体で, リッチ形式 ρ が $\rho=\lambda\omega$ となっているものとする．このときラグランジュ部分多様体の滑らかな族 $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ が平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H_t$$

を満たしていると仮定する．

実際, M がリッチ平坦のとき, 平均曲率流方程式の解 $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T)}$ において初期値 $f_0 : L \to M$ がラグランジュはめ込みならば各 $f_t : L \to M$ もラグランジュはめ込みになることが知られている．

定理 4.1. **(K. Smoczyk [7])** (M,g) をリッチ平坦なケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho=0$ となっているものとする．また L を閉多様体, $f : L \to M$ をラグランジュはめ込みとする．このとき f を初期値とする平均曲率流方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f_t &= H_t, \\ f_0 &= f \end{cases}$$

の解 $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T)}$ において, 各 $f_t : L \to M$ はラグランジュはめ込みとなる．

さらに T. Behrndt は一般のケーラー・アインシュタイン多様体において上記 K. Smoczyk の結果を拡張した．

定理 4.2. **(T. Behrndt [1])** (M,g) をケーラー・アインシュタイン多様体, また L を閉多様体, $f : L \to M$ をラグランジュはめ込みとする．このとき f を初期値とする平均曲率流方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f_t &= H_t, \\ f_0 &= f \end{cases}$$

の解 $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T)}$ において, 各 $f_t : L \to M$ はラグランジュはめ込みとなる．

ここまでの準備の下, ラグランジュ平均曲率流とリーマン面からの写像のシンプレクティック面積の関係について述べる．

定理 4.3. (M,ω) をケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho=\lambda\omega$ を満たすものとし, また $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H_t$$

に従うラグランジュ部分多様体の滑らかな族とする. Σ をコンパクトな境界付きリーマン面で $\partial\Sigma \cong S^1$ とし, $\{u_t : \Sigma \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を滑らかな写像の族で $u_t(\partial\Sigma) \subset f_t(L)$ を満たしているとする. このとき

$$\omega(u_t) = \begin{cases} \left\{\omega(u_0) - \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0)\right\} e^{\lambda t} + \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0), & \lambda \neq 0, \\ \omega(u_0) - \pi\mu(u_0)t, & \lambda = 0 \end{cases}$$

となる. ただし $\omega(u_t) := \int_\Sigma u_t^*\omega$ である.

証明. $\gamma_t := u_t|_{\partial\Sigma} : \partial\Sigma \to L_t, s \mapsto u_t(s)$, と定義する. ラグランジュ部分多様体に境界値をもつリーマン面からの写像のシンプレクティック面積はホモトピー不変なので, 各 u_t を適当に変形して, 境界値 $\gamma_t : \partial\Sigma \to L_t$ は

$$\frac{d}{dt}\gamma_t = H_t$$

を満たしているとしてよい.

すると $d\omega = 0$ とストークスの定理より

$$\int_\Sigma u_{t+\Delta t}^*\omega + \int_{\partial\Sigma} \omega(\frac{d}{ds}\gamma_t, H_t)ds \times \Delta t = \int_\Sigma u_t^*\omega + o(\Delta t),$$

が成り立ち, したがって $\Delta t \to 0$ のとき微分方程式

$$\frac{d}{dt}\omega(u_t) = \sigma_t(\partial u_t)$$

が得られる. ただし $\sigma_t(\partial u_t) = \int_{\partial\Sigma} u_t^*\sigma_t$ である. 一方, 定理 3.3 より

$$\sigma_t(\partial u_t) = \lambda\omega(u_t) - \pi\mu(u_t).$$

(ここで M がケーラー・アインシュタイン多様体であることを用いた.) そしてマスロフ指数はホモトピー不変なので $\mu(u_t) = \mu(u_0)$. したがってまとめると, 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\omega(u_t) = \lambda\omega(u_t) - \pi\mu(u_0)$$

が得られる. これを解くと

$$\omega(u_t) = \begin{cases} \left\{\omega(u_0) - \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0)\right\} e^{\lambda t} + \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0), & \lambda \neq 0, \\ \omega(u_0) - \pi\mu(u_0)t, & \lambda = 0 \end{cases}$$

となる. $\square$

この定理を用いると, いくつかの例において T_e の上からの評価を与えることができる.

例 4.4. $(M = S^2, \omega)$ に $\lambda = 1$ となるケーラー・アインシュタイン構造を考え, また $f_0 : L = S^1 \to M$ を埋め込みとし, $\{f_t : L \to M\}_{t \in [0,T_e)}$ を平均曲率流方程式の解とする．また $f_0(L)$ によって囲まれる領域を Σ とし, 写像 $u_0 : \Sigma \to M$ を $u_0(z) := z$ とする．このとき $\mu(u_0) = 2$ である．

- $\omega(u_0) < \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0) = 2\pi$ のとき, $\omega(u_t) = 0$ ならば $t = \log \frac{2\pi}{2\pi - \omega(u_0)}$．したがってこれより $T_e \leq \log \frac{2\pi}{2\pi - \omega(u_0)}$ であることがわかる．
- $\omega(u_0) = \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0) = 2\pi$ のとき, $\omega(u_t) = \omega(u_0)$．したがってこれからだけでは T_e が有限か無限大かはわからない．

例 4.5. $(M = \{x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C} : y > 0\}, \omega)$ に $\lambda = -1$ となるケーラー・アインシュタイン構造を考え, また $f_0 : L = S^1 \to M$ を埋め込みとし, $\{f_t : L \to M\}_{t \in [0,T_e)}$ を平均曲率流方程式の解とする．また $f_0(L)$ によって囲まれる領域を Σ とし, 写像 $u_0 : \Sigma \to M$ を $u_0(z) := z$ とする．このとき $\mu(u_0) = 2$, $\omega(u_0) > 0 > \frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0) = -2\pi$ である．そして $\omega(u_t) = 0$ ならば $t = \log \frac{2\pi + \omega(u_0)}{2\pi}$．したがってこれより $T_e \leq \log \frac{2\pi + \omega(u_0)}{2\pi}$ であることがわかる．

例 4.6. $(M = \mathbb{C}, \omega)$ に $\lambda = 0$ となるケーラー・アインシュタイン構造を考え, また $f_0 : L = S^1 \to M$ を埋め込みとし, $\{f_t : L \to M\}_{t \in [0,T_e)}$ を平均曲率流方程式の解とする．また $f_0(L)$ によって囲まれる領域を Σ とし, 写像 $u_0 : \Sigma \to M$ を $u_0(z) := z$ とする．このとき $\mu(u_0) = 2$ である．そして $\omega(u_t) = 0$ ならば $t = \frac{\omega(u_0)}{2\pi}$．したがってこれより $T_e \leq \frac{\omega(u_0)}{2\pi}$ であることがわかる．

実は例 4.6 の平均曲率流による閉曲線の変形は 1 点に潰れることが知られている (Grayson の定理 [4]).

5. 単調ラグランジュ部分多様体と平均曲率流

この節では, 単調ラグランジュ部分多様体の平均曲率流による変形について考察する．

$D^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ とする．

定義 5.1. (単調ラグランジュ部分多様体) (M, ω) をシンプレクティック多様体, L を M のなかのラグランジュ部分多様体とする．ある定数 $\varepsilon > 0$ が存在して, $u(\partial D^2) \subset L$ をみたす任意の写像 $u : D^2 \to M$ に対して

$$\mu(u) = \frac{\varepsilon}{\pi}\omega(u)$$

となるとき, L を単調ラグランジュ部分多様体とよぶ．また ε を単調性定数とよぶ．

定理 5.2. (M,ω) をケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho=\lambda\omega$ を満たすものとする．また $\lambda\neq 0$ と仮定する．次に $\{f_t : L\to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H_t$$

に従うラグランジュ部分多様体の滑らかな族で, $f_0(L)$ は単調性定数が ε の単調ラグランジュ部分多様体とする．そのとき

(1) $f_t(L)$ はラグランジュ部分多様体で, 単調性定数 ε_t は

$$\varepsilon_t = \left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda t}+\frac{1}{\lambda}\right\}^{-1}.$$

(2) $\lambda\neq\varepsilon$, $\tau := \frac{1}{\lambda}\log\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\lambda} < T_e$ と仮定する．そのとき $u(\partial D^2)\subset L_\tau$ となる任意の写像 $u : D^2\to M$ に対して, $\omega(u)=0$ が成り立つ.

証明. (1) 定理 4.3 の等式

$$\omega(u_t)=\left\{\omega(u_0)-\frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0)\right\}e^{\lambda t}+\frac{\pi}{\lambda}\mu(u_0)$$

と $\mu(u_0)=\frac{\varepsilon}{\pi}\omega(u_0)$ から $\omega(u_0)$ を消去して, $\mu(u_0)=\mu(u_t)$ とすれば

$$\mu(u_t)=\frac{1}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda t}+\frac{1}{\lambda}\right\}^{-1}\omega(u_t)$$

が成り立つ．したがって $f_t(L)$ も単調ラグランジュ部分多様体で, その単調性定数は $\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda t}+\frac{1}{\lambda}\right\}^{-1}$ である.

(2) (1) の式より

$$\begin{aligned}\omega(u_\tau) &= \pi\left\{\left(\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\lambda}\right)e^{\lambda\tau}+\frac{1}{\lambda}\right\}\mu(u_\tau)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

同様にリッチ平坦なアインシュタイン–ケーラー多様体について次の定理が得られる.

定理 5.3. (M,ω) をリッチ平坦なケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho=0$ とする．また $\{f_t : L\to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H_t$$

に従うラグランジュ部分多様体の滑らかな族で, $f_0(L)$ は単調性定数が ε の単調ラグランジュ部分多様体とする．そのとき

(1) $f_t(L)$ はラグランジュ部分多様体で, 単調性定数 ε_t は

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon t}.$$

(2) $\tau := \frac{1}{\varepsilon} < T_e$ と仮定する．そのとき $u(\partial D^2) \subset L_\tau$ となる任意の写像 $u : D^2 \to M$ に対して, $\omega(u) = 0$ が成り立つ.

証明. 定理 4.3 の等式

$$\omega(u_t) = \omega(u_0) - \pi\mu(u_0)t$$

と $\mu(u_0) = \frac{\varepsilon}{\pi}\omega(u_0)$ から $\omega(u_0)$ を消去して, $\mu(u_0) = \mu(u_t)$ とすればよい. □

ここで定理 5.2(2), 定理 5.3(2) の帰結は Floer [3] の定理を思い起こさせる.

定理 5.4. (A. Floer [3]) (M, ω) を閉シンプレクティック多様体, もしくは凸型の境界を持つコンパクトなシンプレクティック多様体とする．また L を M のなかのコンパクトなラグランジュ部分多様体とし, $u(\partial D^2) \subset L$ となる任意の写像 $u : D^2 \to M$ について $\omega(u) = 0$ が成り立つと仮定する. 次に $\{\varphi_t : M \to M\}_{t\in\mathbb{R}}$ を時間周期 1 のハミルトン函数 $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に付随するハミルトンイソトピーで, L と $\varphi_1(L)$ が横断的に交わると仮定する．そのとき次の不等式が成り立つ

$$\sharp(L \cap \varphi_1(L)) \geq \sum_{i=0}^{\dim L} \dim H_i(L; \mathbb{Z}_2).$$

例えば定理 5.3(2) と定理 5.4 より, 次の系が得られる.

定理 5.5. (M, ω) を閉もしくは凸型の境界を持つコンパクトなリッチ平坦なケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho = 0$ を満たすものとし, また $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H_t$$

に従うコンパクトなラグランジュ部分多様体の滑らかな族で, $f_0(L)$ は単調性定数が ε の単調ラグランジュ部分多様体で, $\tau := \frac{1}{\varepsilon} < T_e$ と仮定する. 次に $\{\varphi_t : M \to M\}_{t\in\mathbb{R}}$ を時間周期 1 のハミルトン函数 $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

に付随するハミルトンイソトピーで, $f_\tau(L)$ と $\varphi_1(f_\tau(L))$ が横断的に交わると仮定する．そのとき次の不等式が成り立つ

$$\sharp(f_\tau(L)\cap\varphi_1(f_\tau(L)))\geq\sum_{i=0}^{\dim L}\dim H_i(L;\mathbb{Z}_2).$$

ここで K. Groh–M. Schwarz–K. Smoczyk–K. Zehmisch [5] による次の定理を述べる.

定理 5.6 (K. Groh–M. Schwarz–K. Smoczyk–K. Zehmisch [5]) $\mathbb{C}^n$ に標準的なケーラー構造を考え, $\{f_t : L \to M\}_{t\in[0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H_t$$

の解で, $f_0(L)$ は単調性定数が ε のコンパクトな単調ラグランジュ部分多様体とする．そのとき

$$T_e\leq\frac{1}{\varepsilon}.$$

証明. まず $\mathbb{C}^n$ のなかの任意のコンパクトな部分集合 K に対して, あるハミルトンイソトピー $\{\varphi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ が存在して, $K\cap\varphi_1(K)=\emptyset$ とできることに注意する． $\frac{1}{\varepsilon}<T_e$ と仮定し, 背理法により定理を証明する． $\frac{1}{\varepsilon}<T_e$ より, $f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L)$ はコンパクトなラグランジュ部分多様体である．そして $f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L)\cap\varphi_1(f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L))=\emptyset$ となるように φ_1 を取ってくる． 一方, $B_R:=\{(z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n : |z_1|^2+\cdots+|z_n|^2\leq R^2\}$ は凸型の境界を持つリッチ平坦なケーラー・アインシュタイン多様体であり, $f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L),\varphi_1(f_{\frac{1}{\varepsilon}}L)\subset B_R$ となるように R を十分大きく取っておく．しかしこれは定理 5.5 の $\sharp(f_{\frac{1}{\varepsilon}}(L)\cap\varphi_1(f_{\frac{1}{\varepsilon}})(L))\geq\sum_{i=0}^{\dim L}\dim H_i(L,\mathbb{Z}_2)$ と相反する．よって $T_e\leq\frac{1}{\varepsilon}$. □

K. Groh–M. Schwarz–K. Smoczyk–K. Zehmisch [5] による定理 5.6 のもともとの証明は, まず $\mathbb{C}^n$ において定理 5.3 を証明し, そして $\mathbb{C}^n$ のなかのコンパクトなラグランジュ部分多様体 L には, L を境界値にもつ非自明な正則円盤が存在するという Gromov の結果を用いて, $T_e<\frac{1}{\varepsilon}$ としたとき矛盾を導いている.

最後に, $\lambda\neq0$ の場合も, 定理 5.2(2) と定理 5.4 より次の系が得られる.

定理 5.7. (M,ω) を閉もしくは凸型の境界を持つコンパクトなケーラー・アインシュタイン多様体, すなわち $\rho=\lambda\omega$ を満たすものとする．また

$\lambda \neq 0$ と仮定する．次に $\{f_t : L \to M\}_{t \in [0,T_e)}$ を平均曲率流方程式

$$\frac{d}{dt} f_t = H_t$$

に従うコンパクトなラグランジュ部分多様体の滑らかな族で，$f_0(L)$ は単調性定数が ε の単調ラグランジュ部分多様体とする．そして $\varepsilon \neq \lambda$ と仮定する．また $\tau := \frac{1}{\lambda} \log \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \lambda} < T_e$ と仮定する．次に $\{\varphi_t : M \to M\}_{t \in \mathbb{R}}$ を時間周期 1 のハミルトン函数 $H : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に付随するハミルトンイソトピーで，$f_\tau(L)$ と $\varphi_1(f_\tau(L))$ が横断的に交わると仮定する．そのとき次の不等式が成り立つ

$$\sharp(f_\tau(L) \cap \varphi_1(f_\tau(L))) \geq \sum_{i=0}^{\dim L} \dim H_i(L; \mathbb{Z}_2).$$

参考文献

[1] T. Behrndt, *Lagrangian mean curvature flow in almost Kähler–Einstein manifolds*, arXiv:0812.4256.

[2] K. Cieliebak and E. Goldstain, *A note on mean curvature, Maslov class and symplectic area of Lagrangian immersions*, J. Sympl. Goem. Vol. 2, No. 2, 261-266 (2004).

[3] A. Floer, *Morse theory for Lagrangian intersections*, J. Differential Geom., 28(1988), 513-547.

[4] M. A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Differential Geom., 26(1987), 285-314.

[5] K. Groh, M. Schwarz, K. Smoczyk and K. Zehmisch, *Mean curvature flow of monotone Lagrangian submanifolds*, Math. Z. 257 (2007) 295–327.

[6] H. Ono, *Integral formula of Maslov index and its applications*, Japan. J. Math. (N.S.) 30 (2004) no. 2, 413–421.

[7] K. Smoczyk, *A canonical way to deform a Lagrangian submanifold*, arXiv:dg-ga/9605005.