Local Orbit Types of Orbits of the Isotropy Representations of Semisimple Pseudo-Riemannian Symmetric Spaces

馬場 蔵人*
東京理科大学大学院理学研究科奨励研究員
大阪市立大学数学研究所（兼任）研究所員

Introduction

1990 年に Olmos([10]) によってユークリッド空間内の部分多様体の法ホロノミー表現はリーマン対称空間のイソトロピー表現に同値であることが示された．また，1992 年に Heintze-Olmos([6]) によってリーマン対称空間のイソトロピー表現がユークリッド空間内の部分多様体の法ホロノミー表現として実現されるかが議論されている．彼らの論文でモデルとなるユークリッド空間内の部分多様体は，リーマン対称空間 G/K のイソトロピー表現の軌道である．これら軌道の法ホロノミー表現はスライス表現に同値であることが示され，G/K の制限ルート系を用いて調べられる．また，2007 年に Boumuki([3]) によって半単純リー群の随伴表現の楕円軌道のイソトロピー部分代数が調べられている．その結果によると半単純リー群 G の随伴表現の楕円軌道は，G のリー代数およびその極大コンパクト部分代数から定まるルート系を用いて決定することができる．

リーマン対称空間内の部分多様体に対する法ホロノミー表現の研究については，1999 年に Tamaru([14]) によって半単純リーマン対称空間のイソトロピー作用の軌道の局所軌道型が調べられ，その結果によると，各軌道の局所軌道型は，その制限ルート系 Δ を用いて決定され，局所軌道型全体からなる集合は Δ の拡大 Dynkin 図形の部分図形と対応付けられることが示されている．

本研究では，半単純擬リーマン対称空間のイソトロピー表現の軌道の局所軌道型を極大分離的可換部分空間に関する制限ルート系を用いて決定する．

1 Preliminaries

G/H を半単純擬リーマン対称空間，つまり，G を連結半単純リー群，H を G の閉部分群で G のある involution σ に対して，$(G_\sigma)_0 \subset H \subset G_\sigma$ となるものとする．ただし，G_σ は σ の固定点集合を表し，$(G_\sigma)_0$ をその単位元を含む連結成分とする．G, H のリー代数をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ とし，$\mathfrak{g}$ の随伴表現を ad で表す．対 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を半単純対称対とよぶ．σ によって誘導される $\mathfrak{g}$ の involution も同じ記号 σ で表す．$\mathfrak{q} := \mathrm{Ker}(\sigma + \mathrm{id})$ の元 X は $\mathrm{ad}(X)$ の複素化 $\mathrm{ad}(X)^{\boldsymbol{C}}$ が対角化可能であるとき

*E-mail: baba@ma.kagu.tus.ac.jp

半単純的であるとよばれる．$\mathfrak{q}$ の半単純元 X は $\mathrm{ad}(X)^{\boldsymbol{C}}$ の固有値がすべて実数であるとき双曲的，またそれらがすべて純虚数であるとき楕円的であるとよばれる．$\mathfrak{q}$ の可換部分空間 $\mathfrak{a}$ は，$\mathfrak{a}$ のすべての元が双曲的もしくはすべての元が楕円的であるとき分離的であるとよばれる．極大分離的可換部分空間は，双曲元から成るときベクトル型であるとよばれ，楕円元から成るときトーラス型であるとよばれる．$\mathfrak{a}$ を極大分離的可換部分空間とする．任意の $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して，

$$\mathfrak{h}_\lambda := \{X \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}(A)^2 X = (-1)^\varepsilon \lambda(A)^2 X, \forall A \in \mathfrak{a}\},$$
$$\mathfrak{q}_\lambda := \{X \in \mathfrak{q} \mid \mathrm{ad}(A)^2 X = (-1)^\varepsilon \lambda(A)^2 X, \forall A \in \mathfrak{a}\},$$

とする．ただし，$\mathfrak{a}$ がベクトル型のとき $\varepsilon = 0$, トーラス型のとき $\varepsilon = 1$ とする．$\Delta := \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \setminus \{0\} \mid \mathfrak{q}_\lambda \neq \{0\}\}$ は G/H あるいは $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系とよばれる．Δ_+ を Δ の正ルート系としたとき $\mathfrak{h} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) + \sum_{\lambda \in \Delta_+} \mathfrak{h}_\lambda, \mathfrak{q} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{a}) + \sum_{\lambda \in \Delta_+} \mathfrak{q}_\lambda$ が成り立つ．ただし，$\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) := \{X \in \mathfrak{h} \mid \mathrm{ad}(A)X = 0, \forall A \in \mathfrak{a}\}, \mathfrak{z}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{a}) := \{X \in \mathfrak{q} \mid \mathrm{ad}(A)X = 0, \forall A \in \mathfrak{a}\}$ とする．各 $\lambda \in \Delta$ に対して，$\mathfrak{g}$ のキリング形式 B を $\mathfrak{q}_\lambda \times \mathfrak{q}_\lambda$ に制限したものは非退化であり，$m(\lambda) := \dim \mathfrak{q}_\lambda, (m^+(\lambda), m^-(\lambda)) := (\dim \mathfrak{q}_\lambda - \mathrm{ind}(B|_{\mathfrak{q}_\lambda \times \mathfrak{q}_\lambda}), \mathrm{ind}(B|_{\mathfrak{q}_\lambda \times \mathfrak{q}_\lambda}))$ とし，それぞれ λ の重複度，符号とよぶ．ただし，$\mathrm{ind}(B|_{\mathfrak{q}_\lambda \times \mathfrak{q}_\lambda})$ は $B|_{\mathfrak{q}_\lambda \times \mathfrak{q}_\lambda}$ の指数を表す．

2 Local orbit types

半単純擬リーマン対称空間 G/H の eH（e は G の単位元）における接空間は部分空間 $\mathfrak{q}$ と同一視される．この同一視によって，G/H のイソトロピー表現は $\mathrm{Ad}(h) := \mathrm{Ad}_G(h)|_{\mathfrak{q}} (\forall h \in H)$ によって定義される表現 Ad と同値である．ここで，Ad_G は G の随伴表現を表す．$X \in \mathfrak{q}$ におけるイソトロピー部分代数を $\mathfrak{h}_X$ で表す．任意の $h \in H$ に対して，$\mathfrak{h}_{\mathrm{Ad}(h)X} = \mathrm{Ad}(h)\mathfrak{h}_X$ が成り立ち，$\mathfrak{h}_X$ の共役類 $[\mathfrak{h}_X] := \{\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{h}_X \mid h \in H\}$ は X を通る軌道の局所軌道型とよばれる．双曲元 $X \in \mathfrak{q}$ に対して，$[\mathfrak{h}_X]$ がすべての双曲元を通る軌道の局所軌道型から成る集合の中で最も小さいものであるとき，$\mathfrak{h}_X$ は双曲的主イソトロピー部分代数とよばれる．同様に，楕円元におけるイソトロピー部分代数に対して，楕円的主イソトロピー部分代数が定義される．以下，ベクトル型極大分離的可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を 1 つ固定し，$\mathfrak{a}$ に関する G/H の制限ルート系を Δ とする．

命題 2.1. $\Delta_A := \{\lambda \in \Delta \mid \lambda(A) = 0\} (A \in \mathfrak{a})$ としたとき $\mathfrak{h}_A = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) + \sum_{\lambda \in \Delta_A \cap \Delta_+} \mathfrak{h}_\lambda$ が成り立つ．

命題 2.1 より $A \in \mathfrak{a} \setminus (\bigcup_{\lambda \in \Delta} \lambda^{-1}(0))$ とすると，$\mathfrak{h}_A = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ が成り立ち，$\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ は双曲的主イソトロピー部分代数であることがわかる．Δ の部分集合 Δ' は以下の 2 条件を満たすとき閉部分系であるとよばれる．

(i) $\lambda, \mu \in \Delta'$ かつ $\lambda + \mu \in \Delta$ ならば $\lambda + \mu \in \Delta'$,

(ii) $\Delta' = -\Delta'$.

このとき次の定理を得る．

定理 2.2 ([2])**.** Δ' を Δ の閉部分系とする．このとき，以下の 3 条件を満たす半単純対称対 $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ が存在する．

(i) $\mathfrak{g}', \mathfrak{h}'$ はそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ の部分代数である，
(ii) $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ の制限ルート系は Δ' に同型である，
(iii) $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ の双曲的主イソトロピー部分代数は $\mathfrak{h}$ における $\mathfrak{a}$ の中心化代数 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ のイデアルである．

証明の概略．θ を $\mathfrak{g}$ の Cartan involution で σ と可換であり，$\mathfrak{a}$ が $\mathfrak{p}(:= \mathrm{Ker}(\theta + \mathrm{id}))$ に含まれるものとする．このとき $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ の極大可換部分空間であることが示される．$\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ と $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ をそれぞれ $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間とし，$\tilde{\mathfrak{a}}$ をそれらを含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分代数とする．このとき，$\tilde{\mathfrak{a}}$ の複素化 $\tilde{\mathfrak{a}}^{\boldsymbol{C}}$ は $\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}$ の Cartan 部分代数になる．$\tilde{\mathfrak{a}}^{\boldsymbol{C}}$ に関する $\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}$ のルート系を R で表し，$\alpha \in R$ に関するルート部分空間を $\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}_{\alpha}$ で表す．このとき，Δ' が Δ の閉部分系であることから，$R' := \{\alpha \in R \mid \bar{\alpha} \in \Delta' \cup \{0\}\}$ は R の閉部分系であることがわかる．ただし，$\bar{\alpha}$ は α を $\mathfrak{a}$ に制限したものを表す．$\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}$ のキリング形式を $B^{\boldsymbol{C}}$ としたとき，各 $\alpha \in R$ に対して $A_{\alpha} \in \tilde{\mathfrak{a}}^{\boldsymbol{C}}$ を $B^{\boldsymbol{C}}(A, A_{\alpha}) = \alpha(A)$ ($\forall A \in \tilde{\mathfrak{a}}^{\boldsymbol{C}}$) によって定義する．このとき，$\mathfrak{g}'^{\boldsymbol{C}} := \mathrm{Span}_{\boldsymbol{C}}\{A_{\alpha} \mid \alpha \in R'\} + \sum_{\alpha \in R'} \mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}_{\alpha}$ とすると，$\mathfrak{g}'^{\boldsymbol{C}}$ は $\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}$ の半単純部分代数であり，$\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}$ の $\mathfrak{g}$ に関する conjugation に関して不変であることがわかる．従って，$\mathfrak{g}' := \mathfrak{g}'^{\boldsymbol{C}} \cap \mathfrak{g}, \mathfrak{h}' := \mathfrak{g}' \cap \mathfrak{h}$ としたとき，半単純対称対 $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ は主張にある 3 条件を満たすことがわかる． □

Δ' を Δ の閉部分系とする．半単純対称対 $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ は定理 2.2 の条件 (i) から (iii) を満たすとき，Δ' に付随した $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の部分対称対とよばれる．このとき次の命題が示される．

命題 2.3. $A \in \mathfrak{a}$ に対して，半単純対称対 $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ を $\Delta_A(:= \{\lambda \in \Delta \mid \lambda(A) = 0\})$ に付随した $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の部分対称対とし，その双曲的主イソトロピー部分代数を $\mathfrak{h}'_0$ とする．このとき，$\mathfrak{h}_A = \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})/\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}'$ が成り立つ．

Ψ を Δ の単純ルート系とする．Ψ の部分集合 Θ に対して，$\Delta_{\Theta} := (\sum_{\lambda \in \Theta} \boldsymbol{R}\lambda) \cap \Delta$ とし，

$$\mathfrak{h}_{\Theta} := \mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a}) + \sum_{\lambda \in \Delta_+ \cap \Delta_{\Theta}} \mathfrak{h}_{\lambda}$$

を Θ に対応する $\mathfrak{h}$ の部分代数といい，その共役類を $[\mathfrak{h}_{\Theta}]$ で表す．$C(\Psi) := \{A \in \mathfrak{a} \mid \lambda(A) > 0 \forall \lambda \in \Psi\}$ （Δ に対する Weyl 領域）とする．このとき次の命題を得る．

命題 2.4.

$$\{[\mathfrak{h}_A] \mid A \in \overline{C(\Psi)}\} = \{[\mathfrak{h}_{\Theta}] \mid \Theta \subset \Psi\}.$$

ただし，$\overline{C(\Psi)}$ は $C(\Psi)$ の閉包を表す．

3 Weyl groups

G/H を半単純擬リーマン対称空間，$\mathfrak{a}$ をベクトル型極大分離的可換部分空間とし，$\mathfrak{a}$ に関する G/H の制限ルート系を Δ とする．H における $\mathfrak{a}$ の正規化群，中心化群をそれぞれ N, Z で表す．すなわち，N, Z はそれぞれ

$$N := \{h \in H \mid \mathrm{Ad}(h)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\},$$
$$Z := \{h \in H \mid \mathrm{Ad}(h)A = A, \forall A \in \mathfrak{a}\}.$$

で定義される H の閉部分群で，Z は N の正規部分群であり，そのリー代数は N のリー代数と等しい．以下，N/Z は $\varphi(hZ) := \mathrm{Ad}(h)|_{\mathfrak{a}}(\forall h \in H)$ によって定義される準同型写像 $\varphi : N/Z \to GL(\mathfrak{a})$ によって N/Z を $GL(\mathfrak{a})$ の部分群としてみなす．

θ を G の Cartan involution で σ と可換なものとする．θ によって誘導される $\mathfrak{g}$ の involution も同じ記号 θ で表し，その $(+1)$-固有空間，(-1)-固有空間をそれぞれ $\mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ とする．各 $\lambda \in \Delta$ に対して，$\mathfrak{q}_\lambda = \mathfrak{q}_\lambda \cap \mathfrak{k} + \mathfrak{q}_\lambda \cap \mathfrak{p}$ が成り立つことに注意する．$\sigma \circ \theta$ の $(+1)$-固有空間を $\mathfrak{h}^a$ で表したとき，$\mathfrak{h}^a = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ が成り立つ．このとき，$\Delta^a := \{\lambda \in \Delta \mid m^+(\lambda) > 0\}$ は $(\mathfrak{h}^a, \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h})$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系に等しいことが示される．さらに，N/Z は Δ^a の Weyl 群 $W(\Delta^a)$ に等しいことが示される．また，$\lambda \in \Delta$ に対して，超平面 $\lambda^{-1}(0)$ に関する鏡映を s_λ で表わしたとき，各 $\lambda \in \Delta^a$ に対して $s_\lambda = \mathrm{Ad}(h)|_{\mathfrak{a}}$ となる $h \in N$ が存在することがわかる．

$W(\Delta)$ を Δ の Weyl 群，l を $W(\Delta^a)$ の $W(\Delta)$ における指数とし $W(\Delta)/W(\Delta^a) = \{[w_1], \ldots, [w_l]\}$ に対して，次の命題が示される．

命題 3.1. Ψ を Δ の単純ルート系とする．双曲元を通る軌道の局所軌道型全体からなる集合は次の集合に等しい．

$$\bigcup_{i=1}^{l} \Big\{ [\mathfrak{h}_\Theta] \,|\, \Theta \subset w_i \cdot \Psi \Big\}.$$

ただし，$w_i \cdot \lambda \in \mathfrak{a}^*(\lambda \in \Psi)$ を $(w_i \cdot \lambda)(A) := \lambda(w_i^{-1}(A))(\forall A \in \mathfrak{a})$ によって定義し，$w_i \cdot \Psi := \{w_i \cdot \lambda \,|\, \lambda \in \Psi\}$ とする．

注意 1. (1) 各 $i \in \{1, \ldots, l\}$ に対して，$w_i \cdot \Psi$ は Δ の単純ルート系である．

(2) G/H がリーマンであるとき，$l = 1$ である．従って，双曲元を通る軌道の局所軌道型全体からなる集合は $\{[\mathfrak{h}_\Theta] \,|\, \Theta \subset \Psi\}$ に等しい．

(3) G/H のイソトロピー表現の楕円元を通る軌道の局所軌道型全体からなる集合 $\mathcal{L}_e(G/H)$ は，トーラス型極大分離的可換部分空間に関する制限ルート系 Γ を用いて次のように表される．$\Gamma^a := \{\lambda \in \Gamma \,|\, m^+(\lambda) > 0\}$ に対する Weyl 領域を D としたとき，

$$\mathcal{L}_e(G/H) = \{[\mathfrak{h}_A] \,|\, A \in \overline{D}\}.$$

ただし，$\overline{D}$ は D の閉包を表す．G/H がリー群型であるとき，すなわち，ある半単純リー群 G_0 を用いて $G/H = (G_0 \times G_0)/\triangle(G_0)$ で表されるとき（$\triangle(G_0)$

は $G_0 \times G_0$ の対角集合), Γ^a は $\mathrm{Lie}(G_0)$ の極大コンパクト部分代数のルート系に同型である (cf. [3]).

4 Determination of local orbit types

この節では，半単純儀リーマン対称空間 G/H に対して，双曲元を通る軌道の局所軌道型全体からなる集合 $\mathcal{L}_h(G/H)$ を決定するレシピを与える．

(Step 1) Δ に付随する G/H の佐武図形，$\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{q}$ の Cartan 部分空間に関する制限ルート系に付随する G/H の佐武図形および $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間に関する制限ルート系に付随する G/K の佐武図形を用いて，$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の双曲的主イソトロピー部分代数 $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$ を決定する．ただし，K は G の極大コンパクト群とする．

(Step 2) $W(\Delta)/W(\Delta^a)$ の完全代表系 $w_1, \ldots, w_l$ および Δ の単純ルート系 Ψ をとってくる．

(Step 3) 各 $\Theta(\subset w_i \cdot \Psi)(i \in \{1, \ldots, l\})$ に対して，$w_i \cdot \Psi$ に関する Δ の Dynkin 図形を用いて Δ_Θ に付随する $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の部分対称対 $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ を見つける．

(Step 4) $\mathfrak{z}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{a})$, $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ および $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ の双曲的主イソトロピー部分代数から $\mathfrak{h}_\Theta$ を決定する，すなわち，$\{[\mathfrak{h}_A] \mid A \in \overline{C(w_i \cdot \Psi)}\}$ を決定する．

(Step 5) すべての $i \in \{1, \ldots, l\}$ に対して，$\{[\mathfrak{h}_A] \mid A \in \overline{C(w_i \cdot \Psi)}\}$ を (Step 3) と (Step 4) を踏んで決定する，すなわち，$\mathcal{L}_h(G/H)$ を決定する．

注意 2. (1) (Step 3) において $(\mathfrak{g}', \mathfrak{h}')$ の存在は定理 2.2 により保証されている．

(2) (Step 4) において $A \in \bigcap_{\lambda \in \Theta} \lambda^{-1}(0)$ とするとき，$\Delta_A = \Delta_\Theta$ となり $\mathfrak{h}_\Theta = \mathfrak{h}_A$ ゆえ，命題 2.3 により $\mathfrak{h}_\Theta$ が求まる．

(3) 半単純擬リーマン対称空間 G/H のイソトロピー表現の楕円元を通る軌道の局所軌道型全体からなる集合を求めるには，$(\mathfrak{g}^c, \mathfrak{h})(\mathfrak{g}^c := \mathfrak{h} + \sqrt{-1}\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}})$ を対称対にもつ半単純擬リーマン対称空間のイソトロピー表現の双曲元を通る軌道の局所軌道型全体からなる集合を求めればよい．

今後の研究計画

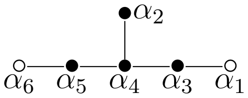
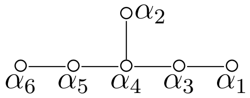
(1) $\mathcal{L}_h(G/H)$ を決定するレシピの (Step 2) において，$W(\Delta)/W(\Delta^a)$ の完全代表系を包括的に求めるレシピを与えることを計画している．G/H が古典型であるときの $W(\Delta^a)$ の $W(\Delta)$ における指数 $[W(\Delta) : W(\Delta^a)]$ のリストを表 1 で与えている．

(2) $\mathcal{L}_h(G/H)$ を決定するレシピを用いて調べられる局所軌道型の構造はリー代数としての同型レベルまでである．共役レベルでの局所軌道型の決定ができるようレシピを改良することを計画している．

5 Example

前節で作成したレシピをもとに，$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=(\mathfrak{e}_{6(6)},\mathfrak{f}_{4(4)})$ の場合のイソトロピー表現の双曲元を通る軌道の局所軌道型全体からなる集合 $\mathcal{L}_h(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ を求める．

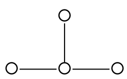
(Step 1) $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とし，Δ を $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系とする．$\mathfrak{a}_\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ をそれぞれ $\mathfrak{a}$ を含む $\mathfrak{q}$ と $\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間とし，$\tilde{\mathfrak{a}}$ をそれらを含む $\mathfrak{g}$ の極大可換部分代数とする．この場合，$\mathfrak{a}_\mathfrak{q}=\mathfrak{a}$ が示される．$\tilde{\mathfrak{a}}^{\boldsymbol{C}}$ に関する $\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}$ のルート系を R で表し，$R_0:=\{\alpha\in R\,|\,\alpha|_\mathfrak{a}=0\}$ とする．$\tilde{\mathfrak{a}}^{\boldsymbol{C}}$ に関する $\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}$ のルート空間分解 $\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}=\tilde{\mathfrak{a}}^{\boldsymbol{C}}+\sum_{\alpha\in R}\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}_\alpha$ を得る．この場合，Δ に付随する $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ の佐武図形 $S(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ は $(\mathfrak{e}_{6(-26)},\mathfrak{f}_4)$ のものと等しいことが示され，$\mathfrak{g}$ の極大コンパクト部分代数 $\mathfrak{k}$ は $\mathfrak{sp}(4)$ であるから $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ の $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ に関する制限ルート系に付随する佐武図形を $S(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ としたとき以上の 2 つの佐武図形はそれぞれ以下のようにかけることがわかる (cf. Table VI, Chapter X of [5]).

$S(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{a})$	$S(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$
	

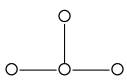
$S(\mathfrak{g},\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ より，$\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ は R_0 の単純ルート系であることがわかる．$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間であるから

$$\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(\mathfrak{a})=\tilde{\mathfrak{a}}\cap\mathfrak{h}+\Big(\sum_{\alpha\in R_0}\mathfrak{g}^{\boldsymbol{C}}_\alpha\Big)\cap\mathfrak{g}$$

を得る．$\tilde{\mathfrak{a}}\cap\mathfrak{h}$ の次元と R_0 の階数はともに 4 であるから，$\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{h}$ の半単純部分代数であり，$(\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(\mathfrak{a}))^{\boldsymbol{C}}$ の $\{\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\}$ に関する Dynkin 図形は以下のようにかけることがわかる．



さらに $S(\mathfrak{g},\mathfrak{k},\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ を用いて $\alpha_i(i=2,3,4,5)$ を $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}$ に制限した時の状況を調べることで，$(\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(\mathfrak{a}),\mathfrak{k}\cap\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(\mathfrak{a}))$ の $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\cap\mathfrak{h}$ に関する制限ルート系に付随する佐武図形は以下のようにかけることがわかる．



従って，$\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{so}(4,4)$ に同型であることがわかる．

(Step 2) $(\mathfrak{h}^a,\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h})=(\mathfrak{su}^*(6)+\mathfrak{su}(2),\mathfrak{sp}(3)+\mathfrak{su}(2))$ より，$\Delta^a=\Delta\cong A_2$ である．従って，$W(\Delta)/W(\Delta^a)=\{[\mathrm{id}]\}$ を得る．Δ の Dynkin 図形は以下で与えられる (cf. Table V of [12]).

$$\overset{\lambda_1}{\circ}\!\!-\!\!-\!\!\overset{\lambda_2}{\circ} \qquad \begin{pmatrix} m^+(\lambda_i) & m^+(2\lambda_i) \\ m^-(\lambda_i) & m^-(2\lambda_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} (i = 1, 2).$$

$\Psi := \{\lambda_1, \lambda_2\}$ とする．

(Step 3–5) Ψ に対応する $\mathfrak{h}$ の部分代数は $\mathfrak{h}$ 自身であり，$\emptyset$ に対応する $\mathfrak{h}$ の部分代数 $\mathfrak{h}_\emptyset$ は $\mathfrak{z}_\mathfrak{h}(\mathfrak{a})$ に等しいので $\mathfrak{h}_\emptyset$ は $\mathfrak{so}(4,4)$ に同型である．$\Theta_i = \{\lambda_i\}(i = 1, 2)$ とする．このとき，Δ_{Θ_i} に付随する $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の部分対称対は $(\mathfrak{so}(5,5), \mathfrak{so}(4,5))$ に同型であり，$(\mathfrak{so}(5,5), \mathfrak{so}(4,5))$ の双曲的主イソトロピー部分代数は，$\mathfrak{so}(4,4)$ に同型であることが示される．従って Θ_i に対応する $\mathfrak{h}$ の部分代数は $\mathfrak{so}(4,5)$ に同型であることが示される（cf. 注意 2(2)）．従って，命題 3.1 より，

$$\mathcal{L}_h(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \left\{ [\mathfrak{f}_{4(4)}], [\tilde{\mathfrak{so}}(4,5)], [\tilde{\mathfrak{so}}(4,4)] \right\}$$

を得る．ただし，$\tilde{\mathfrak{so}}(4,4)$ と $\tilde{\mathfrak{so}}(4,5)$ はそれぞれ $\mathfrak{so}(4,4)$ と $\mathfrak{so}(4,5)$ に同型な $\mathfrak{f}_{4(4)}$ の部分代数を表す.

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$	Δ	Δ^a	$[W(\Delta) : W(\Delta^a)]$
$(\mathfrak{sl}(2n+1, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(2n+1, \boldsymbol{R}))$	$(BC)_n$	B_n	1
$(\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{R}))$	C_n	A_{n-1}	2^n
$(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R}))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1
$(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C}))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1
$(\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{su}^*(2n))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{su}^*(2n) + \mathfrak{su}^*(2n), \mathfrak{su}^*(2n))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1
$(\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1
$(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{su}(p, n-p))$	A_{n-1}	$A_{p-1} \times A_{n-p-1}$	${}_nC_p$
$(\mathfrak{su}(p, n-p) + \mathfrak{su}(p, n-p), \mathfrak{su}(p, n-p))^\dagger$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1
$(\mathfrak{su}(n, n) + \mathfrak{su}(n, n), \mathfrak{su}(n, n))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(p, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(n-p, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})^\dagger$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1
$(\mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{so}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{so}^*(2n))$	D_n	A_{n-1}	2^{n-1}
$(\mathfrak{so}^*(4n) + \mathfrak{so}^*(4n), \mathfrak{so}^*(4n))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{so}^*(2(2n+1)) + \mathfrak{so}^*(2(2n+1)), \mathfrak{so}^*(2(2n+1)))$	$(BC)_n$	$(BC)_n$	1
$(\mathfrak{so}(4n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(2n, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{so}(2(2n+1), \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(2n+1, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$	$(BC)_n$	$(BC)_n$	1
$(\mathfrak{so}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{so}(2p, 2(n-p)))$	D_n	$D_p \times D_{n-p}$	$2{}_nC_p$
$(\mathfrak{so}(2n+1, \boldsymbol{C}), \mathfrak{so}(2p, 2(n-p)+1))$	B_n	$D_p \times B_{n-p}$	$2{}_nC_p$
$(\mathfrak{so}(p, n-p) + \mathfrak{so}(p, n-p), \mathfrak{so}(p, n-p))^\dagger$	B_p	B_p	1
$(\mathfrak{so}(n, n) + \mathfrak{so}(n, n), \mathfrak{so}(n, n))$	D_n	D_n	1
$(\mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{so}(p, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(n-p, \boldsymbol{C}))^\dagger$	B_p	B_p	1
$(\mathfrak{so}(2n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{so}(n, \boldsymbol{C}))$	D_n	D_n	1
$(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}))$	C_n	A_{n-1}	2^n
$(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}) + \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}), \mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{R}))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{C}) + \boldsymbol{C})$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sp}(p, n-p))$	C_n	$C_p \times C_{n-p}$	${}_nC_p$
$(\mathfrak{sp}(p, n-p) + \mathfrak{sp}(p, n-p), \mathfrak{sp}(p, n-p))$	$(BC)_p$	C_p	1
$(\mathfrak{sp}(n, \boldsymbol{C}), \mathfrak{sp}(p, \boldsymbol{C}) + \mathfrak{sp}(n-p, \boldsymbol{C}))$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1

$\dagger : n > 2p$

表 1:

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$	Δ	Δ^a	$[W(\Delta):W(\Delta^a)]$
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{so}(p,n-p))$	A_{n-1}	$A_{p-1}\times A_{n-p-1}$	${}_nC_p$
$(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{so}(p,n-p))^\dagger$	$(BC)_p$	B_p	1
$(\mathfrak{su}(n,n),\mathfrak{so}(n,n))$	$(BC)_n$	D_n	2
$(\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(p,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sl}(n-p,\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R})^\dagger$	$(BC)_p$	B_p	1
$(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R})$	$(BC)_n$	D_n	2
$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{sp}(p,n-p))$	A_{n-1}	$A_{p-1}\times A_{n-p-1}$	${}_nC_p$
$(\mathfrak{su}(2p,2(n-p)),\mathfrak{sp}(p,n-p))^\dagger$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1
$(\mathfrak{su}(2n,2n),\mathfrak{sp}(n,n))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{su}^*(2p)+\mathfrak{su}^*(2(n-p))+\boldsymbol{R})^\dagger$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1
$(\mathfrak{su}^*(4n),\mathfrak{su}^*(2n)+\mathfrak{su}^*(2n)+\boldsymbol{R})$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1
$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{so}^*(2n))$	A_{n-1}	A_{n-1}	1
$(\mathfrak{su}(n,n),\mathfrak{so}^*(2n))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(2))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{su}^*(4n),\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(2))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{su}^*(2(2n+1)),\mathfrak{sl}(2n+1,\boldsymbol{C})+\mathfrak{so}(2))$	$(BC)_n$	$(BC)_n$	1
$(\mathfrak{su}(2n,2n),\mathfrak{sp}(2n,\boldsymbol{R}))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{su}(2n+1,2n+1),\mathfrak{sp}(2n+1,\boldsymbol{R}))$	$(BC)_n$	$(BC)_n$	1
$(\mathfrak{su}(n,n),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{C})+\boldsymbol{R})$	C_n	A_{n-1}	2^n
$(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{su}(2p,2(n-p))+\mathfrak{so}(2))$	C_n	$C_p\times C_{n-p}$	${}_nC_p$
$(\mathfrak{so}^*(2(2n+1)),\mathfrak{su}(2p,2(n-p)+1)+\mathfrak{so}(2))$	$(BC)_n$	$C_p\times (BC)_{n-p}$	${}_nC_p$
$(\mathfrak{so}(4p,4(n-p)),\mathfrak{su}(2p,2(n-p))+\mathfrak{so}(2))^\dagger$	$(BC)_{2p}$	$(BC)_{2p}$	1
$(\mathfrak{so}(2n,2n),\mathfrak{su}(n,n)+\mathfrak{so}(2))^\dagger$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{so}(4p,2(2(n-p)+1)),\mathfrak{su}(2p,2(n-p)+1)+\mathfrak{so}(2))$	$(BC)_{2p}$	$(BC)_{2p}$	1
$(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{so}^*(4p)+\mathfrak{so}^*(4(n-p)))^\dagger$	$(BC)_{2p}$	$(BC)_{2p}$	1
$(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{so}^*(2n)+\mathfrak{so}^*(2n))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{so}^*(2(2n+1)),\mathfrak{so}^*(4p)+\mathfrak{so}^*(2(n-p)+1))$	$(BC)_{2p}$	$(BC)_{2p}$	1
$(\mathfrak{so}(n,n),\mathfrak{so}(n,\boldsymbol{C}))$	D_n	A_{n-1}	2^{n-1}
$(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{so}(2n,\boldsymbol{C}))$	C_n	D_n	2
$(\mathfrak{so}^*(2(2n+1)),\mathfrak{so}(2n+1,\boldsymbol{C}))$	$(BC)_n$	B_n	1
$(\mathfrak{so}(2n,2n),\mathfrak{sl}(2n,\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R})$	C_n	D_n	2
$(\mathfrak{so}(2n+1,2n+1),\mathfrak{sl}(2n+1,\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R})$	$(BC)_n$	B_n	1
$(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{su}^*(2n)+\boldsymbol{R})$	C_n	A_{n-1}	2^n
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{su}(p,n-p)+\mathfrak{so}(2))$	C_n	$C_p\times C_{n-p}$	${}_nC_p$
$(\mathfrak{sp}(p,n-p),\mathfrak{su}(p,n-p)+\mathfrak{so}(2))^\dagger$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1
$(\mathfrak{sp}(n,n),\mathfrak{su}(n,n)+\mathfrak{so}(2))^\dagger$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sp}(p,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sp}(n-p,\boldsymbol{R}))^\dagger$	$(BC)_p$	$(BC)_p$	1
$(\mathfrak{sp}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R})+\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}))^\dagger$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})+\boldsymbol{R})$	C_n	A_{n-1}	2^n
$(\mathfrak{sp}(2n,\boldsymbol{R}),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}))$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{sp}(n,n),\mathfrak{su}^*(2n)+\boldsymbol{R})$	C_n	C_n	1
$(\mathfrak{sp}(n,n),\mathfrak{sp}(n,\boldsymbol{C}))$	C_n	A_{n-1}	2^n

$\dagger : n > 2p$

表 1: (continued)

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{su}(n,m),\mathfrak{su}(i,j)+\mathfrak{su}(n-i,m-j)+\mathfrak{so}(2))(n\leq m)$

condition	Δ	Δ^a	$[W(\Delta):W(\Delta^a)]$
$m=n=i+j$	C_n	$C_i\times C_{n-i}$	${}_nC_i$
$m=i+j \,\&\, j<n-i$	$(BC)_m$	$C_i\times(BC)_{m-i}$	${}_mC_i$
$i<m-j \,\&\, n=i+j$	$(BC)_n$	$(BC)_i\times C_{n-i}$	${}_nC_i$
$i<m-j \,\&\, j<n-i$	$(BC)_{i+j}$	$(BC)_i\times(BC)_j$	${}_{i+j}C_i$
$m=i+j \,\&\, j>n-i$	$(BC)_n$	$C_i\times(BC)_{n-i}$	${}_nC_i$
$i>m-j \,\&\, j>n-i$	$(BC)_{m+n-(i+j)}$	$(BC)_{m-i}\times(BC)_{n-j}$	${}_{m+n-(i+j)}C_{m-i}$
$i<m-j \,\&\, j>n-i$	$(BC)_n$	$(BC)_i\times(BC)_{n-i}$	${}_nC_i$

表 1: (continued)

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{so}(n,m),\mathfrak{so}(i,j)+\mathfrak{so}(n-i,m-j))(n\leq m)$

condition	Δ	Δ^a	$[W(\Delta):W(\Delta^a)]$
$m=n=i+j$	D_n	$D_i\times D_{n-i}$	$2{}_nC_i$
$m=i+j \,\&\, j<n-i$	B_m	$D_i\times B_{m-i}$	$2{}_mC_i$
$i<m-j \,\&\, n=i+j$	B_n	$B_i\times D_{n-i}$	$2{}_nC_i$
$i<m-j \,\&\, j<n-i$	B_{i+j}	$B_i\times B_j$	${}_{i+j}C_i$
$m=i+j \,\&\, j>n-i$	B_n	$D_i\times B_{n-i}$	$2{}_nC_i$
$i>m-j \,\&\, j>n-i$	$B_{m+n-(i+j)}$	$B_{m-i}\times B_{n-j}$	${}_{m+n-(i+j)}C_{m-i}$
$i<m-j \,\&\, j>n-i$	B_n	$B_i\times B_{n-i}$	${}_nC_i$

表 1: (continued)

$(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) = (\mathfrak{sp}(n,m),\mathfrak{sp}(i,j)+\mathfrak{sp}(n-i,m-j))(n\leq m)$

condition	Δ	Δ^a	$[W(\Delta):W(\Delta^a)]$
$m=n=i+j$	C_n	$C_i\times C_{n-i}$	${}_nC_i$
$m=i+j \,\&\, j<n-i$	$(BC)_m$	$(BC)_i\times(BC)_{m-i}$	${}_mC_i$
$i<m-j \,\&\, n=i+j$	$(BC)_n$	$(BC)_i\times(BC)_{n-i}$	${}_nC_i$
$i<m-j \,\&\, j<n-i$	$(BC)_{i+j}$	$(BC)_i\times(BC)_j$	${}_{i+j}C_i$
$m=i+j \,\&\, j>n-i$	$(BC)_n$	$(BC)_i\times(BC)_{n-i}$	${}_nC_i$
$i>m-j \,\&\, j>n-i$	$(BC)_{m+n-(i+j)}$	$(BC)_{m-i}\times(BC)_{n-j}$	${}_{m+n-(i+j)}C_{m-i}$
$i<m-j \,\&\, j>n-i$	$(BC)_n$	$(BC)_i\times(BC)_{n-i}$	${}_nC_i$

表 1: (continued)

謝辞 この研究集会の代表者であり本研究支援者の小池直之先生へ心から感謝を申し上げます.

参考文献

[1] K. Baba, *Satake diagrams and restricted root systems of semisimple pseudo-Riemannian symmetric spaces*, Tokyo J. Math. **32** (2009), 127–158.

[2] K. Baba, *Local orbit types of s-representations for exceptional semisimple symmetric spaces*, SUT J. Math. **44** (2008), 307–328.

[3] N. Boumuki, *Isotropy subalgebras of elliptic orbits in semisimple Lie algebras, and the canonical representatives of pseudo-Hermitian symmetric elliptic orbits*, J. Math. Soc. Japan, **59** (2007), 1135–1177.

[4] M. Berger, *Les espaces symétriques noncompacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **74** (1957), 85–177.

[5] S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[6] E. Heintze and C. Olmos, *Normal Holonomy Groups and s-representations*, Indiana Univ. Math. J., **41** (1992) 869–874.

[7] K. Kondo, *Local orbit types of S-representations of symmetric $\mathbf{R}$-spaces*, Tokyo J. Math. **26** (2003), 67–81.

[8] O. Loos, *Symmetric spaces. I: General theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[9] O. Loos, *Symmetric spaces. II: Compact spaces and classification*, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[10] C. Olmos, *The normal holonomy group*, Proc. Amer. Math. Soc., **100** (1990) 813–818.

[11] T. Oshima and T. Matsuki, *Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups*, J. Math. Soc. Japan, **32** (1980), 399–414.

[12] T. Oshima and J. Sekiguchi, *The restricted root system of a semisimple symmetric pair*, Adv. Stud. Math. **4** (1984), 433–497.

[13] W. Rossmann, *The structure of semisimple symmetric spaces*, Canad. J. Math. **31** (1979), 157–180.

[14] H. Tamaru, *The local orbit types of symmetric spaces under the actions of the isotropy subgroups*, Differential Geom. Appl. **11** (1999), 29–38.

[15] G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. I*, Springer-Verlag, New York, 1972.