Surfaces in hyperkähler manifolds whose twistor lifts are harmonic sections

長谷川和志 (金沢大学人間社会研究域)

2009 年 9 月 8 日

1　序.

Calabi は [2] において，コンパクトな種数 0 の曲面から S^{2n} への充満な極小はめ込みは，S^{2n} のツイスター空間への水平写像から得られること示した (このような極小曲面は超極小曲面とよばれている)．また，Bryant は [4] において，S^4 のツイスター空間への写像を用いて，任意の向き付けられた曲面が S^4 への超極小はめ込みを許容することを示した．このように，球面内の極小曲面の研究にはツイスター空間への写像は重要な役割をもつ．また，Friedrich は [7] において，[4] の結果をふまえ，一般の向き付けられた 4 次元リーマン多様体内の向き付けられた曲面に対して，ツイスターリフトとよばれる写像 (切断) を考え，超極小曲面より一般な概念となるツイスター正則な曲面とよばれるものを定義し，その後，このような曲面は多くの研究が行われている．

一方，最近筆者は、[8] と [9] において，ツイスターリフトが調和切断となる曲面について研究を行った．外空間が自己双対アインシュタイン多様体の場合は，ツイスター正則な曲面のツイスターリフトは調和切断となっている．つまり，この場合，ツイスターリフトが調和切断となる曲面は，ツイスター正則な曲面の一般化と考えることもできる．また，[5] や [12] においても，このような曲面は研究されている．

本稿では講演内容に基づき，外空間が超ケーラー多様体の場合に，ツイスターリフトが調和切断となる曲面について得られた結果を報告する ([10]).

2　ツイスター空間とツイスターリフト.

この節では，ツイスター空間とツイスターリフトの定義等を述べる．$(\tilde{M}, \tilde{g})$ を向き付けられた 4 次元リーマン多様体とし，$\tilde{M}$ 上の反自己双対な 2 次微分形式のベクトル束を $\Lambda^2_-(\tilde{M})$ とする．その単位球面束 $\mathcal{Z}$ は $\tilde{M}$ のツイスター空間とよばれる．$\Lambda^2_-(\tilde{M}) \cong Q \subset \mathrm{End}T\tilde{M}$ と同一視すると，$\mathcal{Z}(\cong U(Q))$ の各 $x \in \tilde{M}$ のファイバーは

$T_x\tilde{M}$ の向きと計量を保つ複素構造の全体となる (以下，一般に，$U(E)$ はリーマンベクトル束 E の単位球面束を表すこととする)．ツイスター空間 $\mathcal{Z}=U(Q)$ には，この同一視のもと，以下のように概複素構造 $J^{\mathcal{Z}}$ が定義される．$\tilde{M}$ の Levi-Civita 接続から誘導される $Q(\cong\Lambda^2_-(\tilde{M}))$ の接続の接続写像 K と射影 $p:\mathcal{Z}\to\tilde{M}$ から，$\mathcal{Z}$ の接束 $T\mathcal{Z}$ の分解

$$T\mathcal{Z}=T^h\mathcal{Z}\oplus T^v\mathcal{Z}$$

が得られる．ここで，$T^h\mathcal{Z}=\ker K,\ T^v\mathcal{Z}=\ker p_*$ である．$J^{\mathcal{Z}}$ を，各 $\phi\in\mathcal{Z}$ において，$X\in T^h_\phi\mathcal{Z}$ に対して，$J^{\mathcal{Z}}(X)=(\phi(p_*(X)))^h_\phi$，$X\in T^v_\phi\mathcal{Z}$ に対して，$J^{\mathcal{Z}}(X)=J^v(X)$ と定義する．ここで，Y^h は $Y\in T\tilde{M}$ の水平リフトで，J^v は各 fiber($\cong S^2$) の標準的な複素構造である．よく知られている様に，$J^{\mathcal{Z}}$ が積分可能であることと $\tilde{M}$ が自己双対であることは必要十分である ([1])．

$(\tilde{M},\tilde{g})$ を向き付けられた 4 次元リーマン多様体とし，(M,g) を向き付けられた曲面とする．$f:(M,g)\to(\tilde{M},\tilde{g})$ を等長はめ込みとする．各 $x\in M$ において，$\tilde{M}$ の向きに適合した $T_{f(x)}\tilde{M}$ の正規直交基底 e_1,e_2,e_3,e_4 で，e_1,e_2 は M の向きに適合し，かつ $e_3,e_4\in T^\perp_xM$ であるものを取り，$\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$ をその双対基底とする．$\Lambda^2_-(\tilde{M})$ の f による引き戻し束 $f^\#\Lambda^2_-(\tilde{M})$ の単位球面束の切断 $\tilde{J}$ を

$$\tilde{J}(x)=\omega_1\wedge\omega_2-\omega_3\wedge\omega_4$$

と定める．この $\tilde{J}\in\Gamma(U(f^\#\Lambda^2_-(\tilde{M})))$ を M のツイスターリフトという．ツイスターリフト $\tilde{J}$ が水平写像，すなわち，$\tilde{\nabla}\tilde{J}=0$ であるとき，曲面 M は超極小とよばれる．ここで，$\tilde{\nabla}$ は $\tilde{M}$ のレビ・チビタ接続から $f^\#(\Lambda^2_-(\tilde{M}))$ に誘導される接続を表す．逆に，向き付けられた曲面からツイスター空間への水平写像 $\varphi:M\to\mathcal{Z}$ を構成することにより，極小はめ込み $p\circ\varphi:M\to\tilde{M}$ を得ることができる (正確には，$p\circ\varphi$ がはめ込みになるように φ を構成する必要がある)．具体例をあげると ([4], [7])，

例 2.1. S^4 のツイスター空間は 3 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^3$ であることに注意し，各非負整数 l につき，

$$\varphi:S^2\to\mathbf{C}P^3$$

を $S^2\cong\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ のもとで，

$$\varphi(z)=[1:(1-\frac{l}{2})z^l:z:\frac{l}{2}z^{l-1}]$$

と定義する．このとき，$p\circ\varphi$ は S^4 内の超極小はめ込みとなる．

このような観点からも，曲面の研究 (特に，極小曲面の場合) にはツイスター空間は重要である．また，J を M の複素構造したとき，$(f_\# \circ \tilde{J})_* \circ J = J^{\mathcal{Z}} \circ (f_\# \circ \tilde{J})_*$ を満たすならば，曲面はツイスター正則とよばれる．ここで，$f_\# : f^\# \Lambda^2_-(\tilde{M}) \to \Lambda^2_-(\tilde{M})$ は束写像を表す．なお，極小かつツイスター正則であること超極小であることは同値である．$J^\perp$ を上で述べたような e_3, e_4 に対して，$J^\perp(e_3) = -e_4$, $J^\perp(e_4) = e_3$ と定める．α を曲面の第二基本形式とし，β を X，$Y \in TM$ に対して

$$\beta(X,Y) = \alpha(X,JY) - J^\perp\alpha(X,Y) + J^\perp\alpha(JX,JY) + \alpha(JX,Y)$$

と定める．このとき，曲面 M がツイスター正則であることと $\beta = 0$ を満たすことは同値である．

(注) 上で述べたように，$\Lambda^2_-(\tilde{M}) \cong Q \subset \mathrm{End}T\tilde{M}$ と同一視すると $\mathcal{Z} \cong U(Q)$ の各 $x \in \tilde{M}$ のファイバーは $T_x\tilde{M}$ の向きと計量を保つ複素構造の全体であった．この同一視のもとでは，M のツイスターリフトは $\tilde{J} \in \Gamma(U(f^\# Q))$

$$\tilde{J}(\zeta) = \begin{cases} J(\zeta) & (\zeta \in TM \text{ のとき}) \\ J^\perp(\zeta) & (\zeta \in T^\perp M \text{ のとき}) \end{cases} \tag{1}$$

と表せる．この見方をすると，M の次元や余次元が高い場合にも，部分多様体からツイスター空間への写像 (リフト) が定義できる場合があることがわかる．つまり，(M, g, J) を (概) エルミート多様体とし，法束 $T^\perp M$ に (法接続に関して平行とは限らない) 複素構造 $J^\perp$ が存在するとき，(1) 式でツイスター空間への写像を定義できる．このような写像を [12] では，許容されたツイスターリフト (admissible twistor lift) とよんでいる．ただし，現在のところ，M が曲面でありかつ余次元が 2 の場合以外のときの研究はあまりないようである．

3　ツイスターリフトが調和切断となる曲面.

まず，調和切断 (harmonic section) の定義を述べておく．(N, h) をコンパクトな n 次元リーマン多様体，E を h^E をファイバー計量とする (N, h) 上のリーマンベクトル束とする．∇^E を h^E と適合した接続とする．$K : TE \to E$ を ∇^E によって決まる接続写像とする．E 上の標準計量とよばれる計量 G を, E の接ベクトル η に対して，

$$G(\eta, \eta) = h(p_*(\eta), p_*(\eta)) + h^E(K(\eta), K(\eta))$$

で定義する．ここで，$p : E \to M$ は射影を表す．$U(E) := \{u \in E \mid h^E(u, u) = 1\}$ とし，$U(E)$ に G の誘導計量を与える. $U(E)$ の切断全体の集合を $\Gamma(U(E))$ と表す. $\xi \in \Gamma(U(E))$ の上記の計量に関するエネルギーを $\mathcal{E}(\xi)$ と表す．切断 $\xi \in \Gamma(U(E))$ が任意の滑らかな変分 $\xi_t \in \Gamma(U(E))$ $(\xi_0 = \xi)$ に対して

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\xi_t)\Big|_{t=0} = 0$$

を満たすとき $\xi \in \Gamma(U(E))$ は調和切断 (harmonic section) と呼ばれる．切断 $\xi \in \Gamma(U(E))$ のエネルギーは

$$\mathcal{E}(\xi) = \frac{n}{2}\mathrm{Vol}(M) + \frac{1}{2}\int_M \|\nabla^E \xi\|^2 dv_h$$

と表せる．したがって，平行な切断は $\mathcal{E}|_{\Gamma(U(E))}$ の最小値を与え，特に調和切断となる．

次に，記号をいくつか用意しておく．$\delta\beta$ を，$X \in TM$ に対して，

$$(\delta\beta)(X) = -\sum_{i=1}^{2}(\nabla'_{u_i}\beta)(u_i, X)$$

と定める．ここで，u_1, u_2 は M の正規直交枠，$\nabla'\beta$ は β の共変微分を表す．また，H を曲面の平均曲率ベクトル場，$\nabla^\perp$ を法接続とする．上で述べ通り，平行な切断は調和切断となるので，超極小曲面のツイスターリフトは調和切断となる．[9] において次を示した．

定理 3.1. 自己双対アインシュタイン多様体内のコンパクトな曲面 M について，次の *3* 条件は互いに同値である：
(1) M のツイスターリフト $\tilde{J}$ が調和切断，
(2) 任意の $X \in TM$ に対して $\nabla^\perp_{JX}H = J^\perp\nabla^\perp_X H$ が成立，
(3) $\delta\beta = 0$ が成立．

したがって，特に，$\tilde{M}$ が自己双対アインシュタイン多様体のとき，$\nabla^\perp H = 0$ を満たす曲面やツイスター正則な曲面のツイスターリフトは調和切断である．一般に，$\xi \in \Gamma(U(E))$ が調和切断であることの必要十分条件は，

$$\bar{\triangle}^{\nabla^E}\xi = \|\nabla^E \tilde{J}\|^2 \xi$$

が成立することである ([13])．ここで，$\bar{\triangle}^{\nabla^E}$ は ∇^E の疎ラプラシアンである．M がコンパクトではないときも，$\xi \in \Gamma(U(E))$ が上記の式を満たすならば，調和切断とよぶ．$\mathbf{R}^2$ の 2 つの平面曲線 γ_1, γ_2 の積曲面 ($\subset \mathbf{R}^4$) を考える．この積曲面につき，ツイスターリフトが調和切断であることの必要十分条件は γ_i の曲率関数 κ_i が定数 c, d_i を用いて，$\kappa_i(s) = cs + d_i$ $(i = 1, 2)$ と表せることである ([8])．$c \neq 0$ のとき，この曲面は平均曲率ベクトル場が平行でなく，ツイスター正則でもない．

4 主結果.

$\tilde{M}$ を標準的な向きとは逆の向きを与えた超ケーラー多様体とし，$\chi(T^\perp M)$ を法束のオイラー数とする．次の定理が得られた．

定理 4.1. M を $\tilde{M}$ 内の向き付けられた連結かつコンパクトな曲面とする．M の種数が 0 かつツイスターリフト $\tilde{J}$ が調和切断ならば，
(1) $\chi(T^{\perp}M) \geq 4$ のとき，M は超極小ではない極小曲面.
(2) $\chi(T^{\perp}M) = 2$ のとき，M は超極小曲面.
(3) $\chi(T^{\perp}M) \leq 0$ のとき，M は超極小曲面ではないツイスター正則な曲面.

(注) $\tilde{M}$ が超ケーラー多様体のとき，$\chi(T^{\perp}M)$ は偶数である．

これより，次が成立することが分かる．

系 4.2. M を $\mathbf{R}^4$ 内の向き付けられた連結かつコンパクトな曲面とする．M の種数が 0 かつツイスターリフト $\tilde{J}$ が調和切断ならば，M はツイスター正則な曲面である．

さらに，次の系が得られる ([3] や [11] 等).

系 4.3. M を $\mathbf{R}^4$ 内の向き付けられた連結かつコンパクトな曲面とする．このとき，M の種数が 0 で平均曲率ベクトル場が法接続に関して平行ならば，M は全臍的である．

したがって，今回得られた結果は Hopf による "$\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトで種数 0 の平均曲率一定曲面は全臍的である" の一般化ともみれる．

最後に，Lagrangian 曲面の場合への応用を述べる．$(\tilde{M}, \tilde{g}, \phi)$ を Kähler 多様体，Ω を $\tilde{M}$ の Kähler 形式とする．M を $\tilde{M}$ 内の Lagrangian 曲面とする．M の Maslov 形式とよばれる 1-形式 ω を $X \in \Gamma(TM)$ に対して，

$$\omega(X) = \frac{1}{\pi}\Omega(X, \phi H)$$

と定める．ϕH が共形ベクトル場であるとき，Maslov 形式 ω は共形的であるという ([6])．はめ込み $w : S^2 \to \mathbf{C}^2 (\cong \mathbf{R}^4)$ を

$$w(x, y, z) = \frac{1}{1+z^2}(x(1+\sqrt{-1}z), y(1+\sqrt{-1}z)).$$

で定義する．この w は Whitney 球面または Whitney はめ込みとよばれる．系 4.2 を用いて，[6] で示されている次の事実も証明できる．

系 4.4. M を $\mathbf{C}^2 (\cong \mathbf{R}^4)$ 内の，向き付けられた連結かつコンパクトな種数 0 の *Lagrangian* 曲面とする．このとき，M の *Maslov* 形式が共形的ならば，M は *Whitney* 球面である．

参考文献

[1] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin and I. M. Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. R. Soc. London Ser. A 362 (1978) 425-461.

[2] E. Calabi, Minimal immersions of surfaces in Euclidean spheres, J. Differential Geometry 1 (1967) 111–125.

[3] B. Y. Chen, Geometry of submanifolds, Pure and Applied Mathematics, No. 22, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

[4] R. L. Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into 4-sphere, J. Diff. Geom. 17 (1982) 455-473.

[5] F. Burstall and I. Khemar, Twistors, 4-symmetric spaces and integrable systems, Math Ann. 344 (2009) 451-461.

[6] I. Castro and F. Urbano, Lagrangian surfaces in the complex Euclidean plane with conformal Maslov form, Tohoku Math. J. (2) 45 (1993) 565-582.

[7] T. Friedrich, On surfaces in four-spaces, Ann. Glob. Anal. Geom., 2 (1984) 275-287.

[8] K. Hasegawa, On surfaces whose twistor lifts are harmonic sections, J. Geom. Phys. 57 (2007), 1549-1566.

[9] K. Hasegawa, Stability of twistor lifts for surfaces in four-dimensional manifolds as harmonic sections, J. Geom. Phys. 59 (2009) 1326-1338.

[10] K. Hasegawa, Surfaces in hyperkähler manifolds whose twistor lifts are harmonic sections, preprint.

[11] S. Hirakawa, Constant Gaussian curvature surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms, Geom. Dedicata 118 (2006), 229-244.

[12] I. Khemar, Geometric interpretation of second elliptic integrable system, Differ. Geom. Appl., to appear.

[13] C. M. Wood, The energy of Hopf vector fields, Manuscripta Math. 101 (2000) 71-88.