

佐々木・アインシュタイン多様体における 特殊ルジャンドル部分多様体の変形について

森山 貴之 (三重大学教育学部)

1 序

$(2n+1)$ 次元リーマン多様体 (M, g) に対し, その計量錐 $(C(M), \bar{g}) = (\mathbb{R}_{>0} \times M, dr^2 + r^2g)$ がケーラー多様体になるとき, (M, g) を佐々木多様体と言う. 更にそのリーマン計量 g がアインシュタイン計量である時に (M, g) は**佐々木・アインシュタイン多様体**と呼ばれる. これは計量錐 $(C(M), \bar{g})$ がリッチ平坦ケーラー多様体となる事と同値である. 更に M の部分多様体 X に対し, その錐 $C(X) = \mathbb{R}_{>0} \times X$ が $C(M)$ の特殊ラグランジュ部分多様体になるとき, X を**特殊ルジャンドル部分多様体**であると呼ぶ. 本講演では佐々木・アインシュタイン多様体における特殊ルジャンドル部分多様体の様々な変形についての結果を報告する.

2 主定理

2.1 特殊ルジャンドル部分多様体

M を単連結でコンパクトな $(2n+1)$ 次元多様体とする. M 上の接触形式 η とは $(d\eta)^n \wedge \eta \neq 0$ となる微分1形式の事である. 接触形式 η に対し, $\eta(\xi) = 1, d\eta(\xi, \cdot) = 0$ となるベクトル場 ξ をレーブベクトル場といい, ξ が生成する線束 $\langle \xi \rangle$ から M 上に葉層構造 \mathcal{F}_ξ (レーブ葉層という) を誘導する.

命題 1 佐々木・アインシュタイン多様体 (M, g) において接触形式 η と複素 n 形式 ψ で以下を満たすものが存在する.

$$\begin{aligned}d\psi &= (n+1)\sqrt{-1}\eta \wedge \psi \\i_\xi \psi &= 0 \\ \psi \wedge d\eta &= 0 \\ \psi \wedge \bar{\psi} &= c_n \left(\frac{1}{2}d\eta\right)^n\end{aligned}$$

ここで $c_n = \frac{1}{n!}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right)^n$. □

命題における (ψ, η) は上の4つの条件に加え $(g, \psi, d\eta)$ の両立性 $g^T(\cdot, \cdot) = d\eta(\cdot, J_\psi \cdot)$ も満たす. 又, 逆にこの性質を満たす組 (ψ, η) の存在から M が佐々木・アインシュタインである事も従う. この様な (ψ, η) は $\theta \in \mathbb{R}$ による変換 $\psi \rightarrow e^{\sqrt{-1}\theta}\psi$ を除いて一意に決まる. そこでこの命題における組 (ψ, η) を一つ固定しよう.

さて、 M の部分多様体について考えるが、この講演では M の部分多様体 X とは埋め込み $\iota: X \hookrightarrow M$ の事とする。

命題 2 M の n 次元部分多様体 X が特殊ルジャンドル部分多様体となるための必要十分条件は $\iota^*\psi^{\text{Im}} = \iota^*\eta = 0$ である。 \square

これはカラビ・ヤウ多様体における特殊ラグランジュ部分多様体の特徴付けのアナロジーである。

2.2 特殊ルジャンドル部分多様体の変形

以後、 X はコンパクトとし、更に X, M は共に連結であると仮定する。埋め込み $f: X \hookrightarrow M$ が X の（法方向の）変形であるとは、以下を満たす埋め込み $f_t: X \hookrightarrow M$ の族 $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ が存在するときに言う：

$$f_0 = \iota, \quad f_1 = f, \quad \frac{d}{dt}f_t \in \Gamma(NX_t)$$

ここで NX_t は像 $X_t = f_t(X)$ の (M, g) における法束である。微分形式の組 $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in \bigoplus_{i=1}^m \wedge^{k_i} M$ で $\iota^*\Phi = (\iota^*\varphi_1, \dots, \iota^*\varphi_m) = (0, \dots, 0)$ となるものを与えたとき、 X の変形 $f: X \hookrightarrow M$ が Φ -変形であるとは変形を定める族 $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ が

$$f_t^*\Phi = (f_t^*\varphi_1, \dots, f_t^*\varphi_m) = (0, \dots, 0)$$

を満たすときに言う。又、 X の Φ -変形全体の集合

$$\mathcal{M}_X(\Phi) = \{f: X \text{ の } \Phi\text{-変形, } C^\infty\text{級}\},$$

$$\mathcal{M}_X^{s,\alpha}(\Phi) = \{f: X \text{ の } \Phi\text{-変形, } C^{s,\alpha}\text{級}\}$$

を X の Φ -変形モジュライ空間という。 X 自身も変形と見る事ができ、 $\mathcal{M}_X(\Phi)$ の元を定める。この変形を自明な変形と呼び、 $\mathcal{M}_X(\Phi)$ の元として 0_X と表す。

では、このモジュライ空間が多様体構造を持つための条件を考えてみよう。まず、 X の M における近傍は法束 NX の零切断の近傍 \mathcal{U} と同一視される事に注意しておく。今、次のようなベクトル空間を考える：

$$\begin{aligned} V_1 &= C^\infty(NX), \\ V_2 &= C^\infty(\bigoplus_{i=1}^m \wedge^{k_i}). \end{aligned}$$

ここで \wedge^{k_i} は X 上の k_i 次微分形式のなす集合である。更に集合 U を

$$U = \{v \in V_1 \mid v_x \in \mathcal{U}, x \in X\} \tag{1}$$

として定めると、各 $v \in U$ に対し、埋め込み $\exp_v: X \hookrightarrow M$ が定まる。この埋め込みを用いて写像 $F: U \rightarrow V_2$ を

$$F(v) = \exp_v^*\Phi = (\exp_v^*\varphi_1, \dots, \exp_v^*\varphi_m)$$

により定める. このとき, $0 \in V_2$ の逆像 $F^{-1}(0)$ が $0 \in V_1$ で滑らかであれば, $F^{-1}(0)$ の 0 の近傍と $\mathcal{M}_X(\Phi)$ の 0_X の近傍との同一視を用いると $\mathcal{M}_X(\Phi)$ も 0_X で滑らかとなる. そこで, $F^{-1}(0)$ の滑らかさについて考えてみよう. 写像 F の 0 における線形化を D_1 とする:

$$D_1 = d_0 F : V_1 \rightarrow V_2.$$

すると $\text{Ker } D_1$ は無限小変形のなす空間である. 次の命題は $\mathcal{M}_X(\Phi)$ の滑らかさに対する一つの判定条件である.

命題 3 X 上のあるベクトル束 E の切断のなす空間 V_3 と微分作用素 $D_2 : V_2 \rightarrow V_3$ が次のような微分複体を満たすとする:

$$0 \rightarrow V_1 \xrightarrow{D_1} V_2 \xrightarrow{D_2} V_3 \rightarrow 0.$$

もし $P_2 = D_1 \circ D_1^* + D_2^* \circ D_2$ が楕円型であり, $\text{Im}(F) \subset \text{Im}(D_1)$ であれば, $\mathcal{M}_X^{s,\alpha}(\Phi)$ は 0_X で滑らかであり, $T_{0_X} \mathcal{M}_X^{s,\alpha}(\Phi) = \text{Ker } D_1^{s,\alpha}$ となる. 更に $P_1 = D_1^* \circ D_1$ も楕円型で Φ が正則条件を満たすとする $\mathcal{M}_X(\Phi)$ は 0_X で滑らかであり, $T_{0_X} \mathcal{M}_X(\Phi) = \text{Ker}(D_1)$ となる. \square

ここで「 Φ が正則条件を満たす」とは, $C^{s,\alpha}$ -級埋め込み $\iota : X \rightarrow M$ が $\iota^* \Phi = 0$ を満たすとき, X と C^s -級微分同相な多様体 X' で埋め込み $\iota' : X' \rightarrow M$ が C^∞ -級となるものが存在するときに言う. 例えば極小部分多様体はこのような正則条件を満たす. この命題を用いて「カラビ・ヤウ多様体における特殊ラグランジュ部分多様体の変形の変形空間は滑らかであり, その接空間は $H^1(X)$ と同型である」というマクリーンの結果 [2] を示すこともできる.

さて, 佐々木・アインシュタイン多様体 M における特殊ルジャンドル部分多様体 X の変形について考えてみよう. 命題 2 より, X の特殊ルジャンドル部分多様体としての変形は (ψ^{Im}, η) -変形として捉えることができ, 特殊ルジャンドル部分多様体としての変形の変形空間は $\mathcal{M}_X(\psi^{\text{Im}}, \eta)$ となる. 簡単のため, この変形空間を \mathcal{M}_X と表す. この変形に対する X の無限小変形の空間は X 上の関数に対するラプラス作用素 Δ_0 の固有空間 $\text{Ker}(\Delta_0 - 2(n+1))$ と同型であることが分かる [1]. しかし, 一般に \mathcal{M}_X が滑らかかどうかは分からない (命題 3 を用いても分からない). そこで $\mathcal{M}_X(\psi^{\text{Im}}, d\eta)$ を \mathcal{N}_X とし, $\mathcal{M}_X(\eta)$ を \mathcal{L}_X と置くと, 以下が成り立つ.

定理 1 モジュライ空間 \mathcal{M}_X は共通部分 $\mathcal{N}_X \cap \mathcal{L}_X$ であり, $\mathcal{N}_X^{s,\alpha}$ と $\mathcal{L}_X^{s,\alpha}$ はそれぞれ滑らかである. \square

更に $\mathcal{N}_X^{s,\alpha}$ には次のような 0_X を含む部分集合 \mathcal{N}_X^T が存在する.

定理 2 \mathcal{N}_X^T は 0_X において滑らかであり, その接空間は $H^1(X)$ と同型である. \square

この集合 \mathcal{N}_X^T はレーブ葉層 \mathcal{F}_ξ に対し横断的な方向の変形のみを考えることにより得られる変形の変形空間である. 定理 2 は特殊ラグランジュ部分多様体の変形に対するマクリーンの結果のアナロジーとしてみる事ができる.

3 更なる結果

では、2章の話の少し拡張してみよう。そこでリーマン多様体 (M, g) で接触形式 η と複素 n 形式 ψ で

$$\begin{aligned} d\psi &= \kappa\sqrt{-1}\eta \wedge \psi \\ i_\xi\psi &= 0 \\ \psi \wedge d\eta &= 0 \\ \psi \wedge \bar{\psi} &= c_n\left(\frac{1}{2}d\eta\right)^n \end{aligned}$$

(と $(g, \psi, d\eta)$ の両立性) を満たすものが存在するとしよう。ここで κ はある実数である。この様な (ψ, η) は $\theta \in \mathbb{R}$ による変換 $\psi \rightarrow e^{\sqrt{-1}\theta}\psi$ を許す。この変換を位相 θ の位相変換と呼ぶ。以後、組 (ψ, η) を一つ固定しておこう。このとき、 M には佐々木構造 (η, ξ, Φ, g) が誘導され、付随するリーフ葉層 \mathcal{F}_ξ は横断的ケーラー・アインシュタインとなる。ここでアインシュタイン定数は 2κ である。又、実はこの様な組 (ψ, η) が存在する事と計量錐 $(C(M), \bar{g})$ が概カラビ・ヤウ多様体 (つまり、至る所消えない正則 $(n+1)$ 形式 Ω とケーラー形式 ω が存在) で $\Omega \wedge \bar{\Omega} = r^{2(\kappa-n-1)}c_{n+1}\omega^{n+1}$ となる事と同値である。特に $\kappa = n+1$ のときは (M, g) は佐々木・アインシュタイン多様体であり、 $\kappa > 0$ のときは η -佐々木・アインシュタイン多様体と同値である事がわかる。又、 $\kappa = 0$ のときはコンタクト・カラビ・ヤウ多様体と呼ばれるものである [5].

3.1 自己同型群 $\text{Aut}(\psi, \eta)$

組 (ψ, η) を保つ微分同相全体の群 $\text{Aut}(\psi, \eta)$ について、いくつかの性質を見ておこう。まず、 M 上の佐々木構造 (η, ξ, Ψ, g) を保つ微分同相全体の群 $\text{Aut}(\eta, \xi, \Psi, g)$ との関係について考える。

命題 4 $\text{Aut}(\eta, \xi, \Psi, g) = \{f \in \text{Diff}(M) \mid f^*\eta = \eta, f^*\psi = e^{\sqrt{-1}\theta}\psi, \theta \in \mathbb{R}\}$. \square

これにより $\text{Aut}(\eta, \xi, \Psi, g)$ は $\text{Aut}(\psi, \eta)$ を部分群として含むだけでなく、 (ψ, η) の位相変換を引き起こす微分同相の群と一致する事が分かる。

次に $\text{Aut}(\psi, \eta)$ のリー環 $\mathfrak{aut}(\psi, \eta)$ について考えるが、 $\mathfrak{aut}(\psi, \eta)$ は $\text{Ker}(\Delta_B - 4\kappa)$ と同型である。ここで Δ_B は葉層多様体 (M, \mathcal{F}_ξ) におけるベーシック (各葉に沿って一定) な関数全体に作用するベーシックラプラス作用素と呼ばれるものである。更に次の関係が分かる：

命題 5 (i) $\kappa > 0$ のとき、 $\mathfrak{aut}(\psi, \eta) \oplus \langle \xi \rangle_{\mathbb{R}} = \mathfrak{aut}(\eta, \xi, \Psi, g)$.

(ii) $\kappa < 0$ のとき、 $\mathfrak{aut}(\psi, \eta) = \{0\}$, $\mathfrak{aut}(\eta, \xi, \Psi, g) = \langle \xi \rangle_{\mathbb{R}}$.

(iii) $\kappa = 0$ のとき、 $\mathfrak{aut}(\psi, \eta) = \langle \xi \rangle_{\mathbb{R}} = \mathfrak{aut}(\eta, \xi, \Psi, g)$. \square

最後に錘 $C(M) = \mathbb{R}_{>0} \times M$ における $\text{Aut}(\psi, \eta)$ の対応物を見ておこう. 計量錘 $(C(M), \bar{g})$ は概カラビ・ヤウ構造 (Ω, ω) を持つのであった. このとき, $\text{Aut}(\psi, \eta)$ の元を $\mathbb{R}_{>0}$ 方向に自明に拡張する事により, (Ω, ω) と r を保つ $C(M)$ の微分同相写像になる. ここで (Ω, ω, r) を保つ $C(M)$ の微分同相全体の群を $\text{Aut}(\Omega, \omega, r)$ と書くと, 逆に $\text{Aut}(\Omega, \omega, r)$ の元は M に $\text{Aut}(\psi, \eta)$ の元を誘導する.

3.2 (拡張された) 特殊ルジャンドル部分多様体の変形

特殊ルジャンドル部分多様体を $\iota^* \psi^{\text{Im}} = \iota^* \eta = 0$ を満たす M の部分多様体 $\iota: X \hookrightarrow M$ として定義する. これは錘 $C(X)$ が概カラビ・ヤウ多様体 $C(M)$ の特殊ラグランジュ部分多様体となる事と同値である. よって, X は (M, g) の極小ルジャンドル部分多様体である. さて, X を特殊ルジャンドル部分多様体とすると, $\mathcal{M}_X(\psi^{\text{Im}}, \eta)$ は X の特殊ルジャンドル変形のモジュライ空間である. これを \mathcal{M}_X と表すと, 定理 1 と定理 2 と同様の結果を示すことができる. 更に

定理 3 X の無限小変形の空間は $\text{Ker}(\Delta_0 - 2\kappa)$ と同型であり, $\kappa = 0$ のとき, X は剛性を持ち, \mathcal{M}_X は 1 次元多様体となる. 又, $\kappa < 0$ のときは X は自明な変形しか持たず, $\mathcal{M}_X = \{0_X\}$ となる. \square

ここで特殊ルジャンドル部分多様体 X が剛性を持つとは X の全ての変形が $\text{Aut}(\psi, \eta)$ の元により誘導される事を言う. これは対応する特殊ラグランジュ錘 $C(X)$ の (特殊ラグランジュ錘としての) 変形が全て $\text{Aut}(\Omega, \omega, r)$ の元より誘導される事を意味する.

3.3 極小ルジャンドル部分多様体としての変形

では, $\kappa > 0$ の場合を考えてみよう. 実数 θ に対し, M の部分多様体 $\iota: X \hookrightarrow M$ が θ -特殊ルジャンドル部分多様体であるとは $\iota^*(e^{\sqrt{-1}\theta}\psi)^{\text{Im}} = \iota^*\eta = 0$ を満たすときに言う. つまり, 位相変換した組 $(e^{\sqrt{-1}\theta}\psi, \eta)$ についての特殊ルジャンドル部分多様体のことである. 次の命題は θ -特殊ルジャンドル部分多様体と極小ルジャンドル部分多様体と同値である事を意味する.

命題 6 向き付け可能な n 次元部分多様体 $\iota: X \hookrightarrow M$ に対し, 以下は同値:

- (i) X は極小ルジャンドル部分多様体.
- (ii) X は θ -特殊ルジャンドル部分多様体.
- (iii) $d * \iota^* \psi^{\text{Im}} = \iota^* \eta = 0$. \square

特に特殊ルジャンドル部分多様体は極小ルジャンドル部分多様体であり, 極小ルジャンドル部分多様体としての変形を考える事ができる. そこで命題の条件 (iii) を線形化することにより以下が従う.

命題 7 特殊ルジャンドル部分多様体 X の極小ルジャンドル部分多様体としての変形に対する無限小変形の空間は $\text{Ker}(\Delta_0 - 2\kappa) \oplus \mathbb{R}$ と同型である.

これは大仁田により η -佐々木・アインシュタイン多様体の極小ルジャンドル部分多様体の変形という観点から示されていた [4]. 又, 彼は同論文で剛性を持つ極小ルジャンドル部分多様体の例を構成した. ここで**極小ルジャンドル部分多様体が剛性を持つ**とは全ての極小ルジャンドル変形が群 $\text{Aut}(g, \eta)$ の元により誘導されるときに言う. このように特殊ルジャンドル部分多様体には2つの剛性を考える事ができる. しかし, これらは同値な概念である事が分かる:

定理 4 特殊ルジャンドル部分多様体が特殊ルジャンドル部分多様体として剛性を持つ事と極小ルジャンドル部分多様体として剛性を持つ事は同値である. \square

参考文献

- [1] A. Futaki, K. Hattori and H. Yamamoto, *Self-similar solutions to the mean curvature flows on Riemannian cone manifolds and special Lagrangians on toric Calabi-Yau cones*, arXiv:1112.5933.
- [2] R. C. McLean, *Deformation of calibrated submanifolds*, Communications in Analysis and Geometry, **6**, (1998) 705–749.
- [3] T. Moriyama, *Deformations of special Legendrian submanifolds in Sasaki-Einstein manifolds*, arXiv:1306.2764.
- [4] Y. Ohnita, *On deformation of 3-dimensional certain minimal Legendrian submanifolds*, Proceedings of The Thirteenth International Workshop on Diff. Geom., **13**, (2009), 71–87.
- [5] A. Tomassini and L. Vezzoni, *Contact Calabi-Yau manifolds and special Legendrian submanifolds*, Osaka. J. Math. **45** (2008), no. 1, 127–147.