An application of Poisson σ model to unitary representations of the Heisenberg groups.

池田 薫
慶應義塾大学経済学部
e-mail: ikeda@z5.keio.jp

December 12, 2019

1 Introduction

U を $2n-3$ 次元 Heisenberg 群としよう．つまり $U = \{u = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{a} & E_{n-2} & \mathbf{0} \\ c & {}^t\mathbf{b} & 1 \end{pmatrix} | \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n-2}, c \in \mathbb{R}\}$ とする．本講演では U のユニタリー表現を考えその既約分解について得られた結果を述べる．Heisenberg 群はべき零群の特殊な場合なので Kirillov の軌道法によりユニタリー表現の制限である分岐則や誘導表現の既約分解については詳しく研究されている．しかし任意のユニタリー表現の既約分解についてはまだよく知られていない．一方 Heisenberg 群の既約ユニタリー表現については Stone-von Nuemann の定理により $L^2(\mathbb{R}^{n-2})$ 上に $h \in \mathbb{R}$ でパラメトライズされたユニタリー表現

$$\rho_h(u)f(\mathbf{x}) = \exp\sqrt{-1}({}^t\mathbf{b}\mathbf{x} + hc)f(\mathbf{x} + h\mathbf{q})$$

で尽くされることが知られている．つまりこれら $\rho_h,\ h \in \mathbb{R}$ を用いて U のヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上のユニタリー表現 π を直積分を使い

$$\pi = \int_{h\in\mathbb{R}}^{\oplus} w(h)\rho_h\mu(\rho_h)$$

と分解することを目標とする．ここで $w(h)$ は既約ユニタリー表現 ρ_h の重複度で 0 あるいは自然数．また $\mu(\rho_h)$ は $\hat{U}$ 上の Borel 測度．Guillemin と Sternberg は [5] の中でコンパクト群 $U(n)$ のユニタリー表現の既約分解における重複度の問題を取り上げた．$U(n)$ の余随伴軌道 $\mathscr{O}$ 上の偏極可能な直線束 L の大域切断 $\Gamma(\mathscr{O}, L)$ 上に最高ウエイト $(\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n)$ を持つ既約ユニタリー表現が構成される．一般

のユニタリー表現の中でウェイト α の既約表現がどれだけの重複度を持つか．それは余随伴軌道上の α から定まる Gelfand-Cetlin 系に関する Bohr-Sommerfeld 集合の個数によることが示された．Heisenberg 群は非コンパクト群でその表現は無限次元である．そのために Heisenberg 群のユニタリー表現が与えられた時その既約成分の重複度をいかに見出すか, それがわかった時既約分解をどのように構成するかと言う問題を本講演では考えていきたい．

R を U の 1 次元の中心とし商空間 $X = U/R$ を考える．X は $\mathfrak{u}/\mathfrak{r}$ と同一視出来て $2n-4$ 次元のアファイン空間とみなせる．ただし $\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}U$, $\mathfrak{r} = \mathrm{Lie}R$ とする．本講演の 1 つ目の目標は X に偏極構造を与え, それに伴う Poisson 構造を定義することである．X を $\mathfrak{u}$ の $(n, 1)$ 成分を 0 と固定した部分空間と同一視する．Λ をシフト行列としたとき下三角 Lax 行列のなす空間 $Lax := \Lambda + \bar{\mathfrak{b}}$ を考える．ここに $\bar{\mathfrak{b}}$ は下三角 Borel 部分代数である．Lax は Poisson 多様体である．Lax を target 空間とみなした X 上の Poisson σ model を $u \in U$ に対して $\sigma_u(x) = u(\Lambda + x)u^{-1}$, $x \in X$ で定義する．さて Lax は $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-2}$ によりパラメトライズされた標準形をもちべき零群の $\bar{N}$ 随伴軌道により Lax は一意的に標準形になる．Lax から X への標準的な射影があるので標準形の $\bar{N}$ 軌道から X への射影が存在する．実は $\bar{N}$ 軌道ではなく標準形の parabolic な戸田格子の軌道さえ考えれば X への上への射影が得られることがわかる．parabolic な戸田格子とはある放物型部分群により決まる部分旗多様体 G/P 上の力学系である．B を上三角 Borel 群としたとき旗多様体 G/B 上の力学系として表されるのが full Kostant-戸田格子である．この事実は G/B が G/P を底空間としファイバー構造を幾重にも重ねたタワー構造で full Kostant-戸田格子がこのタワー構造で定義された Gelfand-Cetlin 系であることに拠っている [5]．さてこの射影により $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-2}$ 方向と parabolic な戸田格子の時間発展の方向 $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-2}$ からなる X 上の偏極が得られる．$\mathscr{O}(\mathbf{q})$ を標準形 $L(\mathbf{q})$ の parabolic な戸田格子の軌道としよう．$\sqcup_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n-2}} \mathscr{O}(\mathbf{q})$ により target 空間 Lax の $2n-4$ 次元の曲面 $Toda$ が得られる．X 上の Poisson 構造を $Toda$ の Lax における Poisson 構造で定義すると X も Poisson 多様体に成る．$Toda$ の Lax での $\mathbf{q}$ 方向の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$ のずらし, 中心方向への $s \in \mathbb{R}$ のずらしを考えその引き戻しを考えたら X 上に新たな Poisson 構造が得られる．つまり $(\mathbf{x}, s) \in \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ は X の Poisson 構造のモジュライ空間と考えられる．さらにこのモジュライ空間に Heisenberg 群 U は自然に作用する．本講演の 2 つ目の目標は 1. このモジュライ空間を量子化し U のユニタリー表現を定義する．2.Stone-von Nuemann の定理を用いてこのユニタリー表現を既約分解する．その際重複度の関数を自然にどのように定義すれば良いかを考える．重複度関数は Ston-von Nuemann の定理のパラメーター h の関数と考えられる．一般に次の直積分で表される $\mathscr{H}$ 上の線形作用素 $T = \int_{h \in \mathbb{R}}^{\oplus} f(h) e^{\Theta(h)} \rho_h dh$ を考える．この右辺を T のスペクトル分解と言おう．$\mathscr{H}$ 上の線形作用素のスペクトル分解からいかに U のユニタリー表現の既約分解が得られるか見ていきたい．その際スペクトル関数を実軸の近傍 $\backslash\mathbb{R}$ の正則

関数として拡張し $\mathbb{R}$ で境界値をとることによりスペクトル関数を佐藤超関数に拡張することを考える．今回 $G = GL_n(\mathbb{R})$ としたが一般の reductive で split な Lie 群に対しても旗多様体 G/B が $\bar{N}$ と同型な被覆の張り合わせにより構成できることから [8], A 型ではない case にも応用できると考える．

2 parabolic な戸田格子と旗多様体 G/B 上の Gelfant-Cetlin 系

改めて記号を定義しよう．$G = GL_n(\mathbb{R})$, $B \subset G$ を上三角 Borel 群, $N \subset B$ をべき零部分群とし $\bar{B}$, $\bar{N}$ はそれぞれの opposite とする．$U \subset \bar{N}$ は introduction で述べた $2n-3$ 次元の Heisenberg 群とし $P \supset B$ は Levi 部分群が $GL_1(\mathbb{R}) \times GL_{n-2}(\mathbb{R}) \times GL_1(\mathbb{R})$ である放物型部分群とする．さらに対応するドイツ文字はそれらの Lie 代数とする．さて $P = P_1$ とし放物型部分群の列

$$G \supset P_1 \supset P_2 \supset \cdots \supset P_{[(n-1)/2]} (\supset P_{[(n-1)/2]+1})$$

を考える．ただし P_k はその Levi 部分群が

$$L_k = \underbrace{GL_1(\mathbb{R}) \times \cdots \times GL_1(\mathbb{R})}_{k} \times GL_{n-2k}(\mathbb{R}) \times \underbrace{GL_1(\mathbb{R}) \times \cdots \times GL_1(\mathbb{R})}_{k}$$

で $n = 2\ell + 1$ のときこの列は $P_{[(n-1)/2]}$ で終わり $P_{[(n-1)/2]}$ の Levi 部分群は $\underbrace{GL_1(\mathbb{R}) \times \cdots \times GL_1(\mathbb{R})}_{n}$ となる．一方 $n = 2\ell$ の時は列は $P_{[(n-1)/2]+1}$ まで伸びてその Levi 部分群は

$$\underbrace{GL_1(\mathbb{R}) \times \cdots \times GL_1(\mathbb{R})}_{\ell} \times \underbrace{GL_1(\mathbb{R}) \times \cdots \times GL_1(\mathbb{R})}_{\ell}$$

$= \underbrace{GL_1(\mathbb{R}) \times \cdots \times GL_1(\mathbb{R})}_{n}$ となる．さて G/P_2 は G/P_1 のファイバー束でそのファイバーは $(G/P_2)/(G/P_1) \simeq P_1/P_2$ となる．また P_1/P_2 は多様体として $2n-7$ 次元の Heisenberg 群 U_{2n-7} と多様体として同型である．これを

$$\begin{array}{ccc} G/P_2 & \longleftarrow & U_{2n-7} \\ \downarrow & & \\ G/P_1 & & \end{array} \tag{2.1}$$

とかく．同様に G/P_3 は G/P_2 のファイバー束で, そのファイバーは $G/P_3/G/P_2 \simeq P_2/P_3 \simeq U_{2n-11}$ となる．以下同様に続けると例えば n が奇数の時次のようなファ

イバー束の列が得られる

$$\begin{tikzcd}
G/B = G/P_{[n/2]} \arrow[d] & P_{[n/2]-1}/P_{[n/2]} \simeq U_3 \arrow[l] \\
G/P_{[n/2]-1} \arrow[d] & P_{[n/2]-2}/P_{[n/2]-1} \simeq U_7 \arrow[l] \\
\vdots & \vdots \\
G/P_2 \arrow[d] & U_{2n-7} \arrow[l] \\
G/P_1 &
\end{tikzcd} \tag{2.2}$$

(2.2) を G/P を底空間とした旗多様体 G/B のタワー構造と言おう．この section では full Kostant-戸田格子と言われる G/B のタワー構造上の Gelfand-Cetlin 系を紹介する．$\Lambda = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$ をシフト行列とする．$Lax := \Lambda + \bar{\mathfrak{b}}$ としよう．$L \in Lax$ を定数行列とし $\Phi(\mathbf{t}) = \exp(t_1 L + \cdots + t_{n-1} L^{n-1})$ とする．$\Phi(\mathbf{t})$ の U-P 分解

$$u(\mathbf{t})^{-1} p(\mathbf{t}) = \Phi(\mathbf{t}) \tag{2.3}$$

を考える，ただし $u(\mathbf{t}) \in U$, $p(\mathbf{t}) \in P$．さて Lax は Poisson 構造を持ち，その Poisson 構造で $\mathrm{tr}L^k$ たちは可換に成る．このうち代数的に独立なものは $\mathrm{tr}L^k, k = 2, \ldots, n$ の $n-1$ 個である．$\mathrm{tr}L = 0$ と固定する．$L^{k-1} = (1/k)\nabla \mathrm{tr}L^k, k = 2, \ldots, n$ となる．$\mathrm{tr}L^k, k = 2, \ldots, n$ と同等な Hamiltonian として

$$|\lambda I_n - L| = \lambda^n + A_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + A_1\lambda + A_0$$

の係数 $A_0, \ldots, A_{n-2}$ が考えられる．一般に $n \times n$ 行列 X に対して上から k 行，右から k 列除いてできる $(n-k) \times (n-k)$ 行列を $X_{(k)}$ とかく．

$$|(\lambda I_n - L)_k| = A^k_{n-2k}\lambda^{n-2k} + \cdots + A^k_0$$

とすると Levi 因子が $GL_k(\mathbb{R}) \times GL_{n-2k}(\mathbb{R}) \times GL_k(\mathbb{R})$ なる放物型部分群 $P_k \supset B$ に対して

$$p \cdot A^k_i(L) = A^k_i(\mathrm{Ad}pL) = \det(q_1)/\det(q_2) A^k_i(L),$$

ただし $p = \begin{pmatrix} q_1 & *** & *** \\ O & Q & *** \\ 0 & O & q_2 \end{pmatrix}$ で $q_1, q_2 \in GL_k(\mathbb{R})$, $Q \in GL_{n-2k}(\mathbb{R})$[9]．よって $I^k_i(L) := A^k_i(L)/A^k_{n-2k}(L)$, $i = 0, \ldots, n-2k-1$ は P_k 不変式になる．した

がって $I_i^k,\ i=0,\dots,n-2k-1$ は G/P_k 上可換な Hamiltonian となる．ここで $k=1$ としよう．G/P_2 は G/P_1 上のファイバー束でそのファイバーは P_1/P_2 となる．これは $GL_{n-2}(\mathbb{R})$ を $GL_1(\mathbb{R})\times GL_{n-4}(\mathbb{R})\times GL_1(\mathbb{R})$ を Levi 部分群とする放物型部分群で割った旗多様体とみなせる．$I_i^1, i=0,\dots,n-3$ は P_1 不変だから P_1/P_2 上 Poisson 可換になる．最初の $A_i, i=0,\dots,n-2$ は G 不変なのでこれらは P_1/P_2 上 $I_i^1, i=0,\dots,n-3$ と Poisson 可換になる．U-P 分解 (2.3) で $p(\mathbf{t})$ の Levi 部分を $p_1(\mathbf{t})\times Q_1(\mathbf{t})\times p_2(\mathbf{t})$ とする．$p=1\times Q_1(\mathbf{t})\times 1\cdot p_1'$ としよう．今 $Q_1(\mathbf{t})$ が

$$Q_1(\mathbf{t})=Q_1(\mathbf{t},\mathbf{s^1})=A(\mathbf{t})\exp(s_0^1\nabla I_0^1+\cdots+s_{n-3}^1\nabla I_{n-3}^1), \tag{2.4}$$

ただし $A(\mathbf{t})\in GL_{n-2}(\mathbb{R})$ で ∇I_i^1 は I_i^1 の P_1/P_2 上の gradient, であると仮定する．次にこの $Q_1(\mathbf{t},\mathbf{s^1})$ の U-P 分解

$$u_1^{-1}(\mathbf{t},\mathbf{s^1})p_1(\mathbf{t},\mathbf{s^1})=Q_1(\mathbf{t},\mathbf{s^1}) \tag{2.5}$$

を考える．ここで $u_1(\mathbf{t},\mathbf{s^1})$ は $2n-7$ 次元の Heisenberg 群で $p_1(\mathbf{t},\mathbf{s^1})$ は同じサイズの放物型部分群. u_1,p_1 は自明な方法で G に埋め込みその像も u_1, p_1 と書くことにする．p_1 の $GL_{n-4}(\mathbb{R})$ の部分を $Q_2(\mathbf{t},\mathbf{s^1})$ とし

$$Q_2(\mathbf{t},\mathbf{s^1})=Q_2(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\mathbf{s^2})=A(\mathbf{t},\mathbf{s^1})\exp(s_0^2\nabla I_0^2+\cdots+s_{n-5}\nabla I_{n-5}^2) \tag{2.6}$$

と言う形を仮定し U-P 分解

$$u_2(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\mathbf{s^2})^{-1}p_2(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\mathbf{s^2})=Q_2(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\mathbf{s^2}) \tag{2.7}$$

を考える．以下同様に分解を行い得られる

$$(u(\mathbf{t}),u_1(\mathbf{t},\mathbf{s^1}),\dots,u_\ell(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\dots,\mathbf{s}^\ell)),$$

ただし $\ell=\begin{cases}[\frac{n-1}{2}] & \text{if } n\text{odd}\\ [\frac{n}{2}]-1 & \text{if } n\text{even}\end{cases}$ は G/P を底空間とする G/B のタワー構造 (2.2) 上の完全可積分系すなわち Gelfand-Cetlin 系で full Kostant-戸田格子という．

$$w(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\dots,\mathbf{s}^\ell)^{-1}=u(\mathbf{t})^{-1}u_1(\mathbf{t},\mathbf{s^1})^{-1}\cdots u_\ell(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\dots,\mathbf{s}^\ell)^{-1},$$

$$b(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\dots,\mathbf{s}^\ell)=p_\ell'(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\dots,\mathbf{s}^\ell)\cdots p_1'(\mathbf{t},\mathbf{s^1})p'(\mathbf{t})$$

とおくと (2.5) から

$$w(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\dots,\mathbf{s}^\ell)^{-1}b(\mathbf{t},\mathbf{s^1},\dots,\mathbf{s}^\ell)=\Phi(\mathbf{t}) \tag{2.8}$$

を得るので時間変数 $\mathbf{t}$ に関しては通常の戸田格子

$$dL(\mathbf{t},\mathbf{s})/dt_k=[(L^k(\mathbf{t},\mathbf{s}))_+,L] \tag{2.9}$$

を満たす ただし $(\mathbf{s^1},\dots,\mathbf{s}^\ell)$ をひとまとめに $\mathbf{s}$ と置いた. また $L(\mathbf{t},\mathbf{s})=w(\mathbf{t},\mathbf{s})Lw(\mathbf{t},\mathbf{s})^{-1}$. 他の $\mathbf{s}$ に関する時間発展の具体的な形はわからない．また parabolic な不変式を chop integrals と言う [3], [4]

3 $X=U/R$ の Poisson 構造への full Kostant-戸田格子の応用

自然な射影を $proj'\bar{\mathfrak{b}}\to\mathfrak{u}$ とする．$proj:Lax\to\mathfrak{u}$ を $proj(\Lambda+\bar{\mathfrak{b}})=proj'(\bar{\mathfrak{b}})$ で定義する．さらに $X=\mathfrak{u}/\mathfrak{r}$ は $\mathfrak{u}$ の $(n,1)$ 成分を 0 にしたものと考えられるから自然な射影 $res:\mathfrak{u}\to X$ も定義できる．よって射影 $res\circ proj:Lax\to X$ が定義できた．$L\in Lax$ で $\mathrm{tr}L=0$ となるものを考える．Kostant[13] により $w\in\bar{N}$ が存在し Adjoint 変換により次のような標準形に unique に変換できる．

$$wLw^{-1}=\Lambda+\begin{pmatrix}0 & {}^t\mathbf{0} & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ r & {}^t\mathbf{q} & 0\end{pmatrix},r\in\mathbb{R},\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{n-2} \tag{3.1}$$

今 (3.1) の右辺の標準形の集合を standard, *s-Lax* とすると (3.1) は Lax は *s-Lax* の $\bar{N}$ 軌道により埋め尽くされていると言い換えることができる．したがって $res\circ proj$ は *s-Lax* の $\bar{N}$ 軌道から X への上の写像になる．実は *s-Lax* の $\bar{N}$ 軌道を full Kostant-戸田格子の $\mathbf{t}$ 軌道に制限してもこの全射性は保たれる．(3.1) の右辺に現れる *s-Lax* の元を $L(r,\mathbf{q})$ と書こう．(2.3) において $\Phi(\mathbf{t})|_{t_{n-1}=0}$ を改めて $\Phi(\mathbf{t})$ とおきその full Kostant-戸田格子の $\mathbf{t}$ 軌道解を $w(\mathbf{t})$ とする．$\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{n-2}$ に対して $\mathscr{O}(\mathbf{q})=\{w(\mathbf{t})L(0,\mathbf{q})w(\mathbf{t})^{-1}|\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{n-2}\}$ とすると

Theorem 1 $res\circ proj$ は $\sqcup_{\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{n-2}}\mathscr{O}(\mathbf{q})$ から X への全単射になっている．

証明の概略 $x\in X$ を $\mathfrak{u}$ で $(n,1)$ 成分が 0 であるものと同一視すると明らかに $res\circ proj(\Lambda+x)=x$．Kostant の定理よりある $a\in\bar{N}$ が存在して $a^{-1}(\Lambda+x)a=L(r,\mathbf{q})\in$ *s-Lax* となる．$\mathbb{R}E_{n,1}$ は $\bar{\mathfrak{n}}$ の中心元だから

$$L(0,\mathbf{q})=L(r,\mathbf{q})-rE_{n,1}=a^{-1}(\Lambda+x)a-rE_{n,1}=a^{-1}(\Lambda+x-rE_{n,1})a$$

明らかに $res\circ proj(\Lambda+x-rE_{n,1})=x$．*s-Lax* の中で $r=0$ のものを改めて *s-Lax* としその元を $L(\mathbf{q})$ と書くことにする．よって *s-Lax* の $\bar{N}$ 軌道から X への上への写像が存在する．さて *s-Lax* の $\bar{N}$ 軌道は初期位相をずらすことにより full Kostant-戸田格子の $\mathbf{t}$ 軌道の和に分解できることがわかる．つまり $w_A(\mathbf{t})^{-1}b_A(\mathbf{t})=A\Phi(\mathbf{t})$, ただし $A\in GL_n(\mathbb{R})$ は定数行列とした時 $\mathscr{O}(\mathbf{q},A):=\{w_A(\mathbf{t})L(\mathbf{q})w_A(\mathbf{t})^{-1}|\mathbf{t}\in\mathbb{R}^{n-2}\}$ とすると *s-Lax* の $\bar{N}$ 軌道は $\cup_A\sqcup_{\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{n-2}}\mathscr{O}(\mathbf{q},A)$ となる．今改めて $\Lambda+x-rE_{n,1}$ を $\Lambda+x$ と書くことにしよう．ある $w_A(\mathbf{t})$ が存在して $\Lambda+x=w_A(\mathbf{t})L(\mathbf{q})w_A(\mathbf{t})^{-1}$ となる．Legendre 変換により Lax における時間発展と旗多様体 G/B における時間発展は同等である．したがって $\Lambda+x$ を始点とし $res\circ projL=x$ に沿った Lax 上のベクトル場を G/B 上の full Kostant-戸田格子の変数 $\mathbf{t},\mathbf{s}$ を変化させることにより実現できる．よって $\mathbf{t},\mathbf{s}$ を変化させることにより $\Lambda+x$ は有限時間のうちに $res\circ proj=x$ のまま $\mathscr{O}(\mathbf{q},E_n)$ すなわち full Kostant-戸田格子の $\mathbf{t}$ 軌道の上に移動させることができる．証明終了

G/B のタワー構造の底空間が G/P だったので次の可換図式を得る．ただし $\sigma : G/B \to G/P$ は canonical な射影．

$$\begin{tikzcd}
\text{Orbits of full Kostant Toda lattice} \arrow[d, "\mathrm{res}\circ\mathrm{proj}"] \arrow[dr, "\sigma"] & \\
X & \text{Orbits of parabolic Toda lattice} \arrow[l, "\mathrm{res}\circ\mathrm{proj}"']
\end{tikzcd}$$

この図式から次の定理を得る．U-P 分解 (2.5) より得られる parabolic な戸田格子の軌道も $\mathscr{O}(\mathbf{q})$ と書くことにする．つまり

$$\mathscr{O}(\mathbf{q}) := \{u(\mathbf{t})L(\mathbf{q})u(\mathbf{t})^{-1} | \mathbf{t} \in \mathbb{R}^{n-2}, u(\mathbf{t}) \in U \text{ solution of (2.3)}\}$$

Theorem 2 $\mathscr{O}(\mathbf{q})$ を上のように定義した時 $\sqcup_{\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{n-2}}\mathscr{O}(\mathbf{q})$ から X へ全単射が存在する．

定理 2 の $\sqcup_{\mathbf{q}\in\mathbb{R}^{n-2}}\mathscr{O}(\mathbf{q})$ も $Toda$ と書こう．$Toda$ から X への全単射を π とする．$Toda$ の点は $L(\mathbf{t},\mathbf{q})$ とかける．$P(\mathbf{t},\mathbf{q}) = \pi(L(\mathbf{t},\mathbf{q})) \in X$ とする．$L(\mathbf{t},\mathbf{q}) = \Lambda + \begin{pmatrix} * & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{L}_1 & * & \mathbf{0} \\ L_{n,1} & {}^t\mathbf{L}_n & * \end{pmatrix}$ としよう．ここで $\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} L_{2,1} \\ \vdots \\ L_{n-1,1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{L}_n = \begin{pmatrix} L_{n,n-1} \\ \vdots \\ L_{n,2} \end{pmatrix}$ とする．よって $P(\mathbf{t},\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{L}_1(\mathbf{t},\mathbf{q}) & O & \mathbf{0} \\ 0 & {}^t\mathbf{L}_n(\mathbf{t},\mathbf{q}) & 0 \end{pmatrix}$ とかける 今 $P(\mathbf{t},\mathbf{q})$ における X の Poisson 構造を $Toda \subset Lax$ の Poisson 構造で定義する．つまり

$$\{L_{n,j}(\mathbf{t},\mathbf{q}), L_{i,1}(\mathbf{t},\mathbf{q})\} = \delta_{i,j}L_{n,1}(\mathbf{t},\mathbf{q}) \tag{3.2}$$

により定義する．(3.2) は中心拡大

$$\{L_{n,j}(\mathbf{t},\mathbf{q}), L_{i,1}(\mathbf{t},\mathbf{q})\} = \delta_{i,j}(L_{n,1}(\mathbf{t},\mathbf{q}) + r), \tag{3.3}$$

を持つ．ここで $r \in \mathbb{R}$．さらに $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$ とした時 $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + \mathbf{x}$ は X の微分同相を誘導する．この微分同相による target space 内の曲面 $Toda$ の引き戻しにより X 上に新しい Poisson 構造が定義できる．したがって $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + \mathbf{x}$ 及び $r \mapsto sr$, ただし $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-2}$, $s \in \mathbb{R}$, により (3.3) から X 上に新しい Poisson 構造が定義される．このことから $\mathcal{S} := \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R} = \{(\mathbf{x}, s)\} \simeq \mathbb{R}^{n-1}$ を X の Poisson 構造のモジュライ空間とみなすことができる．$2n-3$ 次元 Heisenberg 群 U は $\mathcal{S}$ に $h \in \mathbb{R}$ でパラメトライズされた次の作用を持つ．

$$\eta_h(\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{a} & E_{n-2} & \mathbf{0} \\ c & {}^t\mathbf{b} & 1 \end{pmatrix})(s, \mathbf{x}) = (s + hc + {}^t\mathbf{b}\mathbf{x}, \mathbf{x} + h\mathbf{a}). \tag{3.4}$$

4 Heisenberg 群のユニタリー表現の既約分解

$2n-3$ 次元 Heisenberg 群 U の §3 で定義した U のモジュライ空間 $\mathcal{S}$ への作用を量子化しユニタリー表現の既約分解を考える．$\mathscr{H}$ 上のユニタリー表現 ρ を 1 つとり固定する．$\mathcal{S}$ の"量子化"として

$$\hat{\mathcal{S}} := \mathbb{T} \otimes \mathscr{H}, \tag{4.1}$$

ただし $\mathbb{T}$ はトーラス $\{z \in \mathbb{C} \,||z| = 1\}$ とする, を考える．任意の $g \in U$ に対してつぎの図式をみたす $\mathscr{H}$ の閉部分空間 V と V から $L^2(\mathbb{R}^{n-2})$ へのユニタリー作用素 Ψ_h が存在したとする．

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Psi_h} & L^2(\mathbb{R}^{n-2}) \\ {\scriptstyle \rho|_V(g)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \rho_h(g)} \\ V & \xrightarrow{\Psi_h} & L^2(\mathbb{R}^{n-2}) \end{array} \tag{4.2}$$

(4.2) のうち極大な V をユニタリー表現 $(\rho, \mathscr{H})$ の既約成分といい $\mathscr{H}_h$ とかく．ユニタリー表現 $(\rho, \mathscr{H})$ は既約分解 $\mathscr{H} = \oplus_{h\in\mathbb{R}}\mathscr{H}_h$ を持つ．今 $h \in \mathbb{R}$ を固定し $e^{is} \otimes \mathscr{H}_h \subset \mathbb{T} \otimes \mathscr{H}$ 上の U のユニタリー表現 η_h を

$$\eta_h(\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{a} & E_{n-2} & \mathbf{0} \\ c & {}^t\mathbf{b} & 1 \end{pmatrix})e^{is} \otimes f(\mathbf{x}) = e^{i(s+{}^t\mathbf{b}\mathbf{x}+hc)} \otimes f(\mathbf{x} + h\mathbf{a}), \tag{4.3}$$

ただし $\mathscr{H}_h$ を $L^2(\mathbb{R}^{n-2})$ と同一視した, で定義する．さて今 U の Hilbert 空間 V のユニタリー表現 π が既約分解 $V = \oplus_j V_j$ をもつとし $\dim V_j < \infty$ が各 j でなりたったとする．このとき $\mathrm{tr}(1|_{V_j})$ は各 V_j で定数となり π の V_j における重複度を表す．このとき π は既約分解

$$\pi = \int^{\oplus} \mathrm{tr}(1|_{V_j})\pi|_{V_j} dj \tag{4.4}$$

を持つ．X には前述の通り $Toda$ の上の Poisson 構造から induce された Poisson 構造が入る．$\mathfrak{u} = \mathrm{Lie}U$ とするとこの Poisson 構造は Lie algebroid $(\mathfrak{u}, \iota, X)$ を定義する．ここで $\iota : \mathfrak{u} \to TX$ は anchor map で $X_i, Y_j, Z,\ 1 \le i, j \le, n-2$ を $\mathfrak{u}$ の基底とした時 $\iota(X_i) = \xi_{L_{i,1}(P(\mathbf{t},\mathbf{q}))}$, $\iota(Y_j) = \xi_{L_{n,j}(P(\mathbf{t},\mathbf{q}))}$, $\iota(Z) = L_{n,1}(P(\mathbf{t}, \mathbf{q}))$ とする．ここで ξ_* は $*$ に関する Hamiltonian ベクトル場とする．(3.3) から $\mathfrak{u}$ よりもその中心拡大 $\tilde{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} \oplus \mathbb{R} \cdot 1$ を考えたほうが自然である．ρ の微分表現を普遍包絡環 $U(\tilde{\mathfrak{u}})$ の $\mathscr{H}$ 上の表現と考える．この時中心 1 は各既約成分 $\mathscr{H}_h$ 上で定数倍で作用する．これを $m(h)$ とする．$\{m(h)\}_{h\in\mathbb{R}}$ をユニタリー表現 ρ の "座標" と考え ρ と同一視する．この $m(h)$ を上記の $\mathrm{tr}1|_{V_j}$ のアナロジーと考え $\rho = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} m(h)\rho_h dh$ を既約分解と考えたくなるが, 中心の取り方には $r \to sr$ $s \in \mathbb{T}$ なる自由度が存在

する．1 は $1\cdot s$ に変わり $m(h)$ は $m(h)s$ に変わるのだが $1\cdot s$ を改めて 1 と考えれば各既約成分には $m(h)$ 倍で作用する．この時中心 1 の表現 $m(h)$ の重複度を勘定する必要が生じる．それを $e^{\Theta(h)}$ で表す．ただし

$$\Theta(h) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(i(1+m(h))s)ds = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{2\pi i(1+m(h))}-1}{1+m(h)}$$

とする．$m(h) \in \mathbb{Z} - \{-1\}$ ならば $\Theta(h) = 0$ となり重複度は 1．今 $m(h)$ の代わりに $\Theta(h) = \Theta(m(h))$ を ρ の $\mathscr{H}_h$ 上の重複度と考えよう．$m(h)$ の重複度 $\Theta(h)$ を取り込んだ $\mathscr{H}$ 上の線形作用素

$$\int_{h\in\mathbb{R}}^{\oplus} f(h)e^{\Theta(h)}\rho_h dh \tag{4.5}$$

を考えよう．ここで $f(h)$ はスペクトル関数である．スペクトル分解から U のユニタリー表現の既約成分をすくい取るため次の考察を行いスペクトル関数 $f(h)$ を決定する．1 つ目は h をスペクトル分解のパラメーター, $m = m(h)$ を ρ の既約分解のパラメーターと考えパラメーターの入れ替えを行う．2 つ目は実際に表現が実現されるのは $m = m(h)$ が整条件つまり $h \in \mathbb{R}$ が Bohr-Sommerfeld set の点である事．この 2 つの条件を勘案すると $f(h) = \frac{1}{h-m(h)}$ で $h - m(h) = 0$ の根は離散的で Bohr-Sommerfeld 条件から $m(h) \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ つまり $h \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ となる．今 $h - m(h) = 0$ の解を有限個とし $a_1 < a_2 < \cdots < a_k < -1,\ a_j \in \mathbb{Z},\ j = 1,\ldots,k$ とする．この時スペクトル分解

$$\int_{h\in\mathbb{R}}^{\oplus} \frac{1}{h-m(h)}e^{\Theta(h)}\rho_h dh \tag{4.6}$$

が考えられるが $h = a_j, j = 1,\ldots,k$ で極を持ち (4.6) は意味をなさない．$h - m(h) = 0$ の根は $a_1,\ldots,a_k$ で尽くされているので $\frac{1}{h-m(h)}$ は $V\backslash\mathbb{R}$ に解析接続できる．ただし V は $\mathbb{R}$ のある近傍とする．この解析接続を $F(z)$ とかく．$\epsilon > 0$ とすると直積分

$$T_{\pm\epsilon} = \int_{h\in\mathbb{R}}^{\oplus} F(h \pm i\epsilon)e^{\Theta(h)}\rho_h dh \tag{4.7}$$

は意味を持つ．今 T_ϵ と $T_{-\epsilon}$ の境界値の差を取ろう．つまり

$$\lim_{\epsilon\to 0+0} T_\epsilon - T_{-\epsilon} = \int_{h\in\mathbb{R}}^{\oplus} (\lim_{\epsilon\to 0+0} F(h+i\epsilon) - F(h-i\epsilon))e^{\Theta(h)}\rho_h dh \tag{4.8}$$

$A_1,\ldots,A_k$ を定数とし

$$F(z) = \frac{A_1}{z-a_1} + \cdots + \frac{A_k}{z-a_k} + \varphi(z)$$

の形をしているとする．ここで $\varphi(z)$ は正則関数．すると (4.8) のスペクトル関数は佐藤超関数となり $h = a_1,\ldots,a_k$ 以外では 0 となる．よって

$$\lim_{\epsilon\to 0+0} T_\epsilon - T_{-\epsilon} = A_1\int_{h\in\mathbb{R}}^{\oplus} \delta(h-a_1)e^{\Theta(h)}\rho_h dh + \cdots + A_k\int_{h\in\mathbb{R}}^{\oplus} \delta(h-a_k)e^{\Theta(h)}\rho_h dh$$

$$= A_1 e^{\Theta(a_1)} \rho_{a_1} + \cdots + A_k e^{\Theta(a_k)} \rho_{a_k}$$

$m(a_j) = a_j \in \mathbb{Z} \backslash \{-1\}, j = 1, \ldots, k$ より

$$= A_1 \rho_{a_1} + \cdots + A_k \rho_{a_k}$$

となり既約分解を得る.

References

[1] E.Bintz and S.Pods, The geometry of Heisenberg groups, with applications in signal theory, optics, quantization and field quantization, Math.surveys and monographs **151**, AMS, Providence, Rhode Island, 2008

[2] F.Bonechi, A.Cattaneo and M.Zabzine, Geometrical quantization and non perturbative Poisson sigma model, Adv.Theor.Math.Phys. **10**(2006) 683-712

[3] P.Deift, L.Li, T,Nanda and C.Tomei, The Toda lattice on a generic orbit is integrable, Comm.Pure Appl.Math. **39**(1986) 183-232

[4] N.Ercolani, H.Flaschka and S.Singer, The geometry of the full Kostant-Toda lattice, in O.Babelon, P Cartier and Y.Kosmann-Schwarzbach(Eds), Integrable systems the Verdier memorial conference, Actes du colloque international de Luminy, Prog.Math.**115**, Birkhäuser, Boston, 1993, pp181-226

[5] V.Guillemin and S.Sternberg, The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds, J.Funct.Anal.**52**(1983) 106-128

[6] —, Geometric quantization and multiplicities of group representations, Invent.Math. **67**(1982) 515-538.

[7] Harish-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, Trans.AMS.**83**(1956) 98-163.

[8] K.Ikeda, The resolution of the singular loci of the Toda lattice on the split and connected reductive Lie groups, Journal of geometry and physics.**148**(2020)

[9] —, A generalization of the invariant formulas of k-chop integrals, Kumamoto journal of mathematics**27**(2014) 1-4

[10] L.C.Jeffrey and Weitsman, Bohr-Sommerfeld orbits in moduli space of flat connections and Verlinde dimension formula, Comm.Math.Phys.**150**(1992) 593-630.

[11] A.Kirillov, Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspehi Mat.Nauk **17**(1962) 57-110

[12] B.Kostant, Quantization and unitary representation, in: C.T.Taam(Eds.), In Lectures in Modern Analysis and Applications III, Springer Lecture Note in Math.**170**, Springer, Berlin, 1970, pp87-208.

[13] —, On Whittaker vectors and representation theory, Invent.Math. **48**(1978) 101-184.

[14] P.Schaller and Th.Strobl, Introduction to Poisson σ-models, In Low-dimensional in statical physics and quantum field theory(Scladming, 1995), Lecture Note in Phys. **469**, Springer, Berlin, 1996, pp321-333.

[15] I.Vaisman, On the geometric quantization of the symplectic leaves of Poisson manifolds, Diff.Geom.its Appl.**7**(1997) 265-275

[16] N.M.J.Woodhouse, Geometric quantization, second ed., Oxford university press, New York, 1992.