

離散調和写像による曲面の一意化

梶ヶ谷徹 (東京電機大工)*

本講演は、田中亮吉氏(東北大学理)との共同研究[2]の内容に基づく。

(M, G) をリーマン計量 G が定義された n 次元コンパクトリーマン多様体, $X = (V, E, m_E)$ を重み付き有限グラフとする. ここで, V は頂点集合, E は辺集合を表し, $m_E : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は E 上の正值関数で, 辺 $e \in E$ とその逆向きの辺 \bar{e} に対しては, $m_E(\bar{e}) = m_E(e)$ を満たすとする. 以降, 各辺 $e \in E$ は閉区間 $[0, 1]$ としばしば同一視する. X から M への区分的に微分可能な写像 $f : X \rightarrow M$ に対し, f の Dirichlet エネルギーを

$$E_G(f) := \frac{1}{2} \sum_{e \in E} m_E(e) \int_0^1 \|\dot{f}_e\|_G^2 dt$$

と定義する. ここで, $f_e = f|_e : [0, 1] \rightarrow M$ であり, \dot{f}_e はその接ベクトルを表す (一般には, $f(e)$ が退化していても良い). また積分 $\int_0^1 \|\dot{f}_e\|_G^2 dt$ の値は, 像 $f(e)$ の G に関する長さの二乗に一致する. f の無限小変形に対し, Dirichlet エネルギーの停留点となる写像のことを離散調和写像 (**discrete harmonic map**) と呼ぶ. これは古典的な滑らかなリーマン多様体間の調和写像の (一つの) 離散版であり, 実際この離散調和写像に対して, 滑らかな場合のいくつかの結果の類推が自然な形で成立する. 例えば, 離散調和写像の存在と一意性に関する次の Eells-Sampson 型定理は基本的である:

定理 1 (Colin de Verdière [1], 小谷-砂田 [3]). (1) 任意の連続写像 $f_0 : X \rightarrow (M, G)$ に対し, そのホモトピー類 $\mathcal{C} = [f_0]$ 内に少なくとも 1 つ離散調和写像 $h_G : X \rightarrow (M, G)$ が存在する. またもし, (M, G) の断面曲率が非正であるなら, h_G の Dirichlet エネルギーは \mathcal{C} 内で最小である. すなわち, $E_G(h_G) = \min_{f \in \mathcal{C}} E_G(f)$ が成り立つ.

(2) (M, G) が平坦トーラス $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ ならば, 平行移動による同一視を除き, \mathcal{C} 内の離散調和写像は一意的である. また, (M, G) が負の断面曲率を持ち, f_0 が 1 点とも測地円ともホモトピックでないなら, \mathcal{C} 内の離散調和写像は, 写像として一意に存在する.

平坦トーラス $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ への写像の場合を考えるなら, 定理 1 で存在の保証された離散調和写像 $h_G : X \rightarrow T^n$ は, その普遍被覆 \mathbb{R}^n への自然なリフトを考えることにより, ユークリッド空間 \mathbb{R}^n 内への X の周期的な調和実現を与えていると見なすことができる. ここで, この周期性, すなわち \mathbb{R}^n 内の \mathbb{Z}^n -格子 (あるいは T^n 上の平坦計量) の取り方にも任意性があり, 定理 1 によれば, X の \mathbb{R}^n における周期的調和実現は, 各 \mathbb{Z}^n -格子 (あるいは各平坦計量) 毎に存在することに注意する. この意味で, X を \mathbb{R}^n 内に “周期的に” 調和実現する方法は幾通りもあるのだが, 驚くべきことに, この周期性による任意性を考慮に入れてなお Dirichlet エネルギーを最小化する写像が見つかることがある:

定理 2 (小谷-砂田 [3]). n 次元トーラス T^n 上の体積の等しい平坦計量全体の集合を $\mathcal{M}_0(T^n)$ と書く. また連続写像 $f_0 : X \rightarrow T^n$ は, 全射な準同型 $(f_0)_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(S)$ を誘導すると仮定する. このとき, 汎関数

$$\mathcal{E} : \mathcal{C} \times \mathcal{M}_0(T^n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}(f, G) := E_G(f)$$

部分多様体幾何とリー群作用 2019(2019年 12月 25日-26日, 於東京理科大学) 講演アブストラクト.

* e-mail: kajigaya@mail.dendai.ac.jp

の最小値に到達する点 (h_0, G_0) が存在する. さらに, そのような点は, h_0 の平行移動および恒等写像にホモトピックな等長変換による同一視のもと, 一意的である.

この定理で得られた離散調和写像 $h_0 : X \rightarrow (T^n, G_0)$ (またはその普遍被覆 \mathbb{R}^n へのリフト) のことを X の標準実現 (standard realization) と呼ぶ. 標準実現を与える平坦計量の構成法と関連する幾何学については [3, 4] を参照して頂きたい.

定理 1, 2 を踏まえて, ターゲットが負の断面曲率を持つ場合, より正確に, 種数 2 以上の閉曲面への重み付きグラフの埋め込みに対して, 双曲版 “標準実現” の存在を問うことは自然な問題であろう (cf. [3, 4]). 事実, 論文 [2] において, それが存在することを示した:

定理 3 (K.-田中 [2]). S_g を種数 $g (\geq 2)$ の閉曲面とし, S_g 上の双曲計量 (断面曲率 -1 のリーマン計量) 全体の集合を $\mathcal{M}_{-1}(S_g)$ と書く. また連続写像 $f_0 : X \rightarrow S_g$ は, 全射な準同型 $(f_0)_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(S_g)$ を誘導すると仮定する. このとき, 汎関数

$$\mathcal{E} : \mathcal{C} \times \mathcal{M}_{-1}(S_g) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{E}(f, G) := E_G(f)$$

の最小値に到達する点 (h_0, G_0) が存在する. さらに, そのような双曲計量は, 恒等写像にホモトピックな等長変換による同一視のもと, 一意的である.

π_1 -全射性の条件は, 例えば, $f_0 : X \rightarrow S_g$ が S_g を充填 (fill) する場合, すなわち, 像 $f_0(X)$ の S_g 内の補集合が開円盤と同相な部分集合の disjoint union となる場合に満たされる (例えば, S_g の三角形分割により得られるグラフなど). 定理 3 は, ドメインが滑らかなリーマン多様体の場合の山田の結果 [5] の離散版と言えるもので, 実際, 証明は [5] の議論の離散アナロジーを構築することにより成される (この証明はトーラスの場合の小谷-砂田 [3] とは異なる). 講演ではこの証明の詳細に触れたい.

定理 3 はあくまで存在 (と一意性) 定理であって, 与えられた重み付き有限グラフ X とその連続写像 $f_0 : X \rightarrow S_g$ に対して, 定理 3 の汎関数 \mathcal{E} の最小値を達成する最適双曲計量 G_0 (とその調和写像) を具体的に構成することは, トーラスの場合に比べて, 一般にそれほど簡単ではない (トーラスの場合は [4] を参照). しかしながら, いくつかの例 (直角双曲正六角形の貼り合わせにより構成される閉曲面, 双曲平面上の三角形タイリングに付随する閉曲面など) が自然にあるグラフの最適計量を与えるということを示すことができる. 最適性を見るのに, 最適計量 G_0 の以下の性質は有用である:

定理 4 ([2]). 定理 3 と同じ仮定のもと, 連続写像 $f_0 : X \rightarrow S_g$ のホモトピー類 \mathcal{C} に対して,

$$\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g) := \{[\varphi] \in \text{Mod}(S_g) : \varphi \circ f_0 \sim f_0 \circ \sigma \text{ for some } \sigma \in \text{Aut}(X)\}$$

と定める. ここで, $\text{Mod}(S_g)$ は閉曲面 S_g の写像類群, \sim はホモトピックの意味である. このとき, $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$ は $\text{Mod}(S_g)$ の有限部分群であり, \mathcal{C} にのみ依存して定まる. もし, G_0 が定理 3 の汎関数 \mathcal{E} の最小値を達成する双曲計量ならば, G_0 の等長変換群 $\text{Isom}(S_g, G_0)$ の部分群 \mathcal{G}_0 であって, 自然な対応 $\mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$, $\varphi \rightarrow [\varphi]$ が群同型となるものが存在する. さらに, $h_0 : X \rightarrow (S_g, G_0)$ を G_0 に関する一意的な調和写像とすると, 任意の $\varphi \in \mathcal{G}_0$ に対して, ある $\sigma_{[\varphi]} \in \text{Aut}(X)$ が存在して, $\varphi \circ h_0 = h_0 \circ \sigma_{[\varphi]}$ が成り立つ.

この定理は, Nielsen realization problem の改良版である. ここで, 有限群 $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$ は計量とは無関係に定義されていることに注意する. $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$ は一般には空集合となり得るが, $\mathcal{G}_{\mathcal{C}}(S_g)$ の位数が大きい場合には, これが最適計量の等長変換として実現されると

言うことから, 求めたい最適双曲計量の「形」に制約を与える. 講演では, この定理を用いて得られるいくつかの最適計量の例を紹介したい.

参考文献

- [1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Comment rendre géodésique une triangulation d'une surface?*, Enseign. Math. (2), 37(3-4):201–212, 1991.
- [2] T. KAJIGAYA AND R. TANAKA, *Uniformizing surfaces via discrete harmonic maps*, arXiv1905.05427.
- [3] M. KOTANI AND T. SUNADA, *Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps*. Trans. Amer. Math. Soc., 353(1): 1–20, 2001.
- [4] T. SUNADA, *Topological Crystallography. With a view towards discrete geometric analysis*. Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, 6. Springer, Tokyo, 2013.
- [5] S. YAMADA, *Weil-Petersson convexity of the energy functional on classical and universal Teichmüller spaces*. J. Differential Geom., 51(1):35–96, 1999.