複素 2-平面グラスマン多様体のツイスター空間と非平坦複素空間形の Hopf 超曲面

木村真琴 (茨城大学) *

部分多様体幾何とリー群作用 2019

1　序文

複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ および複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ (併せて非平坦複素空間形という) の実超曲面 M^{2n-1} については、部分多様体論の一つの分野として盛んに研究されてきた [8]。その中でも重要なクラスとして **Hopf 超曲面**(M の構造ベクトル場 ξ が M の shape operator A の固有ベクトル, $A\xi = \mu\xi$) がある。$\mathbb{CP}^n$ においては、複素部分多様体上の tube はすべて Hopf 超曲面であるが、逆は必ずしも成り立たない (§2)。一方で、我々は [14] において $\mathbb{CP}^n$ 内の実超曲面 M^{2n-1} から複素 2-平面 Grassmann 多様体への Gauss 写像 $\gamma : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を用いて、Hopf 超曲面の特徴づけを与えた。本講演では $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の (四元数 Kähler 構造に関する)**twistor 空間**内の「水平部分多様体」から、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面が構成できることを示す (§3)。

複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ において正則断面曲率を -4 とするとき、その Hopf 超曲面ついては:(1) $|\mu| > 2$ のときは、$\mathbb{CP}^n$ の場合と同様の結果が成り立つことが知られていた [18] が、(2) $|\mu| < 2$ のときは、全く異なる結果が成り立ち [12]、(3) $|\mu| = 2$ のときはわかっていなかった。我々は [10] において $\mathbb{CH}^n$ 内の実超曲面から複素 Minkowski 空間 $\mathbb{C}_1^{n+1}$ 内の不定値複素 2-平面のなす Grassmann 多様体への Gauss 写像 $\gamma : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ を用いて、Hopf 超曲面の特徴づけを与えた。その関連として、 $\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ の (パラ四元数 Kähler 構造に関する) 3 つの **twistor 空間**内の「水平部分多様体」から、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面が構成できることを示す (§5)。

2　複素射影空間内の Hopf 超曲面

本講演の結果において重要な役割を果たしている、複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ の **Hopf 超曲面**について述べる。まず $\widetilde{M}^n$ を複素 n 次元の Kähler 多様体、J をその複素構造とする。M^{2n-1} を $\widetilde{M}$ の (実余次元 1 の) 実超曲面、N を $\widetilde{M}$ における M の (局所的に定義された) 単位法ベクトル場とする。このとき、$\xi := -JN$ は M の各点で単位接ベクトルである。ξ を実超曲面 M の**構造ベクト**

* 本研究は JSPS 科研費 JP 16K05119 の助成を受けたものです。

ル場という。そして、ξ が M の各点で shape operator A (実超曲面 M の各点の接空間における対称線形変換) の固有ベクトルであるとき、すなわち $A\xi = \mu\xi$ をみたすとき、M を $\widetilde{M}$ の **Hopf 超曲面**という。 このとき μ を Hopf 曲率という。

注意 2.1 特に外の Kähler 多様体 $\widetilde{M}$ が「非平坦複素空間型」、すなわち複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ または複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ のとき、Hopf 曲率 μ は M 上定数である [13],[17]。さらに $\mu = 0$ のとき、ξ の積分曲線は $\widetilde{M}$ の測地線であり、$\widetilde{M} = \mathbb{CP}^n$ かつ $\mu \neq 0$ のとき、ξ の積分曲線は $\mathbb{CP}^n$ 内の全測地的複素射影直線 $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{S}^2$ 上の「小円」である。

例 2.2 **$\mathbb{CP}^n$ の等質実超曲面** $\mathbb{CP}^n$ の等長変換群 $PU(n+1)$ の部分群の軌道となっている**等質実超曲面**は、Takagi [20] によって分類されていて、階数が 2 の Hermite 対称空間の isotropy 表現から得られることが分かっている。そして [21] において、それらは全て Hopf 超曲面であることが知られている。一方 [14] において、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 M^{2n-1} が主曲率一定であることと、等質実超曲面 (の一部) であることが同値であることが示されている。それらは**等径超曲面**でもあって、以下の $\mathbb{CP}^n$ 内の Kähler 部分多様体上の半径 r の tube であることがわかっている (g は M の異なる (一定な) 主曲率の個数)：

(i) ($g = 2$, 測地的超球面) 1 点、および全測地的複素射影超平面 $\mathbb{CP}^{n-1}$ $(0 < r < \pi/2)$,
(ii) ($g = 3$) 全測地的複素射影空間 $\mathbb{CP}^{n-1}$ $(1 \leq k \leq n-2)$ $(0 < r < \pi/2)$,
(iii) ($g = 3$) 複素 2 次超曲面 $\mathbb{Q}^{n-1}$ $(0 < r < \pi/4)$,
(iv) ($g = 5$) Segre 埋め込み $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^k$, $n = 2k+1$, $(0 < r < \pi/4)$,
(v) ($g = 5$) Plücker 埋め込み $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^5)$, $n = 9$, $(0 < r < \pi/4)$,
(vi) ($g = 5$) Half spin 埋め込み $SO(10)/U(5)$, $n = 15$, $(0 < r < \pi/4)$.

以下、特に注意しない限り $\mathbb{CP}^n$ は正則断面曲率が 4 である Fubini-Study 計量をもつものとする。

定理 2.3 (Cecil-Ryan [7])

(i) $\mathbb{CP}^n$ の実超曲面 M^{2n-1} が、ある複素部分多様体 Σ 上の半径一定の tube の一部であるとき、M は $\mathbb{CP}^n$ の **Hopf 超曲面**である。
(ii) 逆に、M^{2n-1} を $\mathbb{CP}^n$ 内の Hopf 超曲面とする。Hopf 曲率を $\mu = 2\cot 2r$ $(0 < r < \pi/2)$ と表した時に、focal map $\phi_r : M \to \mathbb{CP}^n$, $\phi_r(p) = \exp_p^{\mathbb{CP}^n}(rN_p)$ の**階数が** M **上一定**ならば、$\phi_r(M)$ は $\mathbb{CP}^n$ の**複素部分多様体**であって、M は $\phi_r(M)$ 上半径 r の tube (の一部) である。
(iii) また、$\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面の「平行超曲面」は Hopf 超曲面である。

注意 2.4 $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面について、focal map の階数に関する仮定を省くと Cecil-Ryan の定理は一般に成り立たない。Borisenko [6] はその場合の結果をいくつか得ている。その一つとして: 「$\mathbb{CP}^n$ 内の compact embedded Hopf 超曲面は、$\mathbb{CP}^n$ 内のある algebraic variery 上の半径

一定の tube である」を示した。

3　複素 2-平面 Grassmann 多様体の twistor 空間 の水平部分多様体と $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面

$(\widetilde{M}^{4m}, g, Q)$ を実 $4m$ 次元四元数 Kähler 多様体とする。すなわち、(M, g) は Riemann 多様体で、Q は $\mathrm{End}\,TM$ の階数 3 の部分束で、以下の条件をみたす: (i) M の各点 p に対して M 内の近傍 U と U 上定義された Q の切断 I_1, I_2, I_3 が存在して $I_j^2 = -1$ $(j = 1, 2, 3)$, $I_1 I_2 = -I_2 I_1 = I_3$, $I_2 I_3 = -I_3 I_2 = I_1$, $I_3 I_1 = -I_1 I_3 = I_2$ が成り立つ。(ii) 任意の $L \in Q_p$ について g_p は L で不変である。(iii) ベクトル束 Q は g から定まる Levi-Civita 接続に関して、$\mathrm{End}\,TM$ 内で平行である。$\mathbb{C}^{n+1}$ 内の複素 2-平面のなす複素 Grassmann 多様体 $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ は、Hermite 対称空間であって、かつ四元数 Kähler 多様体の構造ももっている (cf. [24])。

$\widetilde{M}$ 上の単位球面束 $\mathcal{Z} = \{\tilde{I} \in Q |\ \tilde{I}^2 = -1\}$ を $\widetilde{M}$ の **twistor 空間**という (cf. [19], [24]) このとき、次が成り立つ：(i) $\widetilde{M}$ の Ricci 曲率が 0 でないならば、$\mathcal{Z}$ は複素接触構造をもつ。(ii) $\widetilde{M}$ の Ricci 曲率が正ならば、$\mathcal{Z}$ は twistor fibration $\pi : \mathcal{Z} \to \widetilde{M}$ が全測地的 fiber をもつ Riemannian submersion となるような、Ricci 正の Einstein-Kähler 計量をもつ。

塚田 [23] は、$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間は $\mathbb{CP}^n$ の射影余接束 $P(T^*\mathbb{CP}^n)$ であることと、複素等質空間として $U(n+1)/U(n-1) \times U(1) \times U(1)$ と表示されることを示した。一方で、$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ は $\mathbb{CP}^n$ 内の複素射影直線 $\mathbb{CP}^1$ の集合 $\{\mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^n\}$ と同一視できて、$\mathbb{CP}^n$ 内の測地線 $\mathbb{RP}^1 \subset \mathbb{CP}^1 \subset \mathbb{CP}^n$ と $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の twistor 空間 $\mathcal{Z}$ の切断 I $(I^2 = -1)$ が対応することがわかる。さらに、$\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{CP}^1$ 内の測地線を一つ与えると、その同心円の族も一つ定まることに注意する。

$\varphi : \Sigma^{n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ を複素 $n-1$ 次元 Kähler 多様体から $\mathbb{C}^{n+1}$ の複素 2-平面のなす Grassmann 多様体への全複素 immersion とする。このとき、Σ の各点 p に対して、$\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の (四元数 Kähler 構造に関する) 概複素構造 $\tilde{I}_p \in Q_{\varphi(p)}$ を対応させると、twistor 空間 $\mathcal{Z}$ の部分多様体 $\tilde{I}(\Sigma)$ が得られる (natural lift という)。そして、Σ が $\mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の全複素部分多様体であることから、$\tilde{I}(\Sigma)$ は $\mathcal{Z}$ の複素接触構造に関して**複素 Legendre 部分多様体**であることがわかる [2]. E を $\mathcal{Z}$ 上の $\mathbb{S}^1$-束で、その各 fiber が base point に対応する $\mathbb{CP}^n$ 内の測地線であるものとする。このとき、次の図式:

$$\begin{tikzcd} \tilde{I}^*E \arrow[r, "\eta"'] \arrow[d] & E \arrow[r, "\psi"'] \arrow[d] & \mathbb{CP}^n \\ \Sigma^{n-1} \arrow[r, "\tilde{I}"'] & \mathcal{Z} & \end{tikzcd},$$

(ψ は「射影」、η は $\tilde{I}$ から誘導される束写像で $\tilde{I}^*E$ は引き戻し束) に関して、写像 $\Phi := \psi \circ \eta : \tilde{I}^*E \to \mathbb{CP}^n$ は ($M = \tilde{I}^*E$ の正則点において) $A\xi = 0$ をみたす Hopf を与えて、その平行超曲面の族は、すべて Hopf である [16]。

注意 3.1　上記の $\mathbb{CP}^n$ の Hopf 超曲面 (の平行族) の構成は、$\mathbb{CP}^n$ 内の実超曲面 M^{2n-1} に関する **Gauss 写像** [14] $\gamma : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_2(\mathbb{C}^{n+1})$ の逆構成とみなせる。また、その Gauss 写像 γ は、M^{2n-1} の「normal congruence」[3] と「twistor fibration」の合成写像とも考えられる。

4　複素双曲空間の Hopf 超曲面

M^{2n-1} を (正則断面曲率が -4 の) 複素双曲空間の Hopf 超曲面とし、μ (定数) をその Hopf 主曲率 ($A\xi = \mu\xi$) とする。(i) $|\mu| > 2$ のとき: 定理 4.4 と同様に $\mathbb{CH}^n$ の複素部分多様体と関連付けられることが Montiel [18] によって示されている。(ii) $|\mu| < 2$ のとき: $\mathbb{S}^{2n-1}$ 内の 2 つの Legendre 部分多様体の組から、この場合の Hopf 超曲面が構成できることが、微分式系の議論を用いて Ivey [12] によって示された。(iii) $|\mu| = 2$ のときの Hopf 超曲面の構成法はわかっていなかった。

例 4.1　$\mathbb{CH}^n$ 内の主曲率が一定な Hopf 超曲面は Montiel [18] によって構成され、Berndt [4] によって分類されている:

(i)　($g = 2$, $|\mu| > 2$) 測地的超球面,
(ii)　($g = 2$, $|\mu| > 2$) 全測地的複素双曲超平面上の tube,
(iii)　($g = 3$, $|\mu| > 2$) 全測地的複素双曲部分空間 $\mathbb{CH}^k$ ($1 \le k \le n-2$) 上の tube,
(iv)　($g = 2$, $|\mu| = 2$) ホロ球面,
(v)　($g = 2, 3$, $|\mu| < 2$) 全測地的 Lagrange 実双曲空間 $\mathbb{RH}^n$ 上の tube.

注意 4.2　$\mathbb{CH}^n$ の等質超曲面は Berndt-Tamaru [5] によって分類されていて、$\mathbb{CP}^n$ の場合とは異なり**非 Hopf** であるものが存在する。また、$\mathbb{CP}^n$ および $\mathbb{CH}^n$ の実超曲面で (誘導計量が) Einstein であるものは存在しないが、$\mathbb{CH}^n$ のホロ球面は **Ricci soliton** である [11] (cf. [9]).

5　$\mathbb{C}_1^{n+1}$ 内の不定値複素 2-平面のなす複素 Grassmann 多様体の twistor 空間の水平部分多様体と $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面

複素双曲空間 $\mathbb{CH}^n$ の一つのモデルとして、指数 1 の不定値複素数空間 $\mathbb{C}_1^{n+1}$ 内の (実 2 次超曲面として定義される) anti de-Sitter 空間 $\mathbb{H}_1^{2n+1}$ を単位複素数 $\mathbb{S}^1$ の作用で割った空間を考える。

$\widetilde{M} := \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}_1^{n+1})$ は、四元数 Kähler 構造の「dual」と考えられる**パラ四元数 Kähler 構造**をもつ: すなわち、$(\widetilde{M}, g)$ は **neutral 計量をもった**擬 Riemann 多様体で、Q は $\mathrm{End}\,T\widetilde{M}$ の階数 3 の部分束で、以下の条件をみたす: (i) $\widetilde{M}$ の各点 p に対して $\widetilde{M}$ 内の近傍 U と U 上定義された Q の切断 I_1, I_2, I_3 が存在して $I_1 = -1$, $I_j^2 = -1$ ($j = 2, 3$), $I_1 I_2 = -I_2 I_1 = -I_3$, $I_2 I_3 = -I_3 I_2 = I_1$, $I_3 I_1 = -I_1 I_3 = -I_2$ が成り立つ。(ii) 任意の $L \in Q_p$ について g_p は L で不変である。(iii) ベクトル束 Q は g から定まる Levi-Civita 接続に関して、$\mathrm{End}\,T\widetilde{M}$ 内で平行で

ある。

このとき、Q_p ($p \in \widetilde{M}$) は自然に Lie 代数 $\mathfrak{su}(1,1)$ および Minkowski 空間 $\mathbb{R}^3_1$ と同一視できる:

$$\tilde{Q}_p = \{aI_1 + bI_2 + cI_3 |\ a, b, c \in \mathbb{R}\} \cong \mathfrak{su}(1,1) \cong \mathbb{R}^3_1.$$

さらに、$\tilde{Q}_p$ の 3 種類の切断 $\tilde{I}^2 = 1$, $\tilde{I}^2 = -1$, $\tilde{I}^2 = 0$ の集合はそれぞれ以下のようにみなせる:

$$(S_+)_p := \{\tilde{I} \in \tilde{Q}_p |\ \tilde{I}^2 = 1\} \cong S^2_1 : \text{ (de-Sitter 2-space)}, \tag{1}$$
$$(S_-)_p := \{\tilde{I} \in \tilde{Q}_p |\ \tilde{I}^2 = -1\} \cong H^2 : \text{ (hyperbolic 2-space)}, \tag{2}$$
$$(S_0)_p := \{\tilde{I} \in \tilde{Q}_p |\ \tilde{I}^2 = 0\} \cong L^2 : \text{ (light cone)}. \tag{3}$$

このとき、$\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}^{n+1}_1)$ の切断 $\tilde{I}$ の集合で、それぞれ (1), (2), (3) をみたす **twistor 空間** を、それぞれ $\mathcal{Z}_+$, $\mathcal{Z}_-$, $\mathcal{Z}_0$ (cf. [1]) とすると、$\mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}^{n+1}_1)$ への fibration について水平な twistor 空間の $2n-2$ 次元部分多様体 Σ^{2n-2} に対して、§3 と同様に Σ 上の $\mathbb{S}^1$-束 ($|\mu| > 2$) (resp. $\mathbb{R}$-束 ($|\mu| < 2$), ($|\mu| = 2$)) を $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面として実現できる (準備中)。

注意 5.1　§3 と同様に、上記の $\mathbb{CH}^n$ の Hopf 超曲面 (の平行族) の構成は、$\mathbb{CP}^n$ 内の実超曲面 M^{2n-1} に関する **Gauss 写像** [10] $\gamma : M^{2n-1} \to \mathbb{G}_{1,1}(\mathbb{C}^{n+1}_1)$ の逆構成とみなせる。

参考文献

[1] D. V. Alekseevsky and V. Cortés, *The twistor spaces of a para-quaternionic Kähler manifold*, Osaka J. Math. **45** (2008), no. 1, 215–251.

[2] D. V. Alekseevsky and S. Marchiafava, *A twistor construction of Kähler submanifolds of a quaternionic Kähler manifold*, Ann. Mat. Pura Appl. **184** (2005), no. 1, 53-74.

[3] H. Anciaux, *Spaces of geodesics of pseudo-Riemannian space forms and normal congruences of hypersurfaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **366** (2014), no. 5, 2699–2718.

[4] J. Berndt, *Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space*, J. Reine Angew. Math. **395** (1989), 132–141.

[5] J. Berndt and H. Tamaru, *Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one* Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007), no. 7, 3425–3438.

[6] A. A. Borisenko, *On the global structure of Hopf hypersurfaces in a complex space form*, Illinois J. Math. **45** (2001), no. 1, 265–277.

[7] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Focal sets and real hypersurfaces in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc. **269** (1982), no. 2, 481–499.

[8] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Geometry of Hypersurfaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, NY (2015) DOI 10.1007/978-1-4939-3246-7

[9] J. T. Cho and M. Kimura, *Ricci solitons and real hypersurfaces in a complex space form*, Tohoku Math. J., **61** (2009), no. 2, 205-212.

[10] J. T. Cho and M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex hyperbolic space and submanifolds in indefinite complex* 2*-plane Grassmannians I*, Topol. Appl., **196** (2015), 594–607.

[11] T. Hashinaga, A. Kubo and H. Tamaru, *Homogeneous Ricci soliton hypersurfaces in the complex hyperbolic spaces*, Tohoku Math. J., **68** (2016), no. 4, 559-568.

[12] T. E. Ivey, *A d'Alembert formula for Hopf hypersurfaces*, Results Math. **60** (2011), no. 1-4, 293–309.

[13] U.-H. Ki and Y. J. Suh, *On real hypersurfaces of a complex space form*, Math. J. Okayama Univ. **32** (1990), 207–221.

[14] M. Kimura, *Real hypersurfaces and complex submanifolds in complex projective space*, Trans. Amer. Math. Soc., **296** (1986), 137–149.

[15] M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex* 2*-plane Grassmannians I*, Diff. Geom. Appl., **35** (2014), suppl, 156–163.

[16] M. Kimura, *Hopf hypersurfaces in complex projective space and half-dimensional totally complex submanifolds in complex* 2*-plane Grassmannians II*, Diff. Geom. Appl., **54** (2017), part A, 44–52.

[17] Y. Maeda, *On real hypersurfaces of a complex projective space*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 529–540.

[18] S. Montiel, *Real hypersurfaces of a complex hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), no. 3, 515–535.

[19] S. Salamon, *Quaternionic Kähler manifolds*, Invent. Math. **67** (1982), no. 1, 143–171.

[20] R. Takagi, *On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space*, Osaka J. Math. **10** (1973), 495–506.

[21] R. Takagi, *Real hypersurfaces in a complex projective space with constant principal curvatures*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), no. 1, 43–53.

[22] M. Takeuchi, *Totally complex submanifolds of quaternionic symmetric spaces*, Japan. J. Math. (N.S.) **12** (1986), no. 1, 161–189.

[23] K. Tsukada, *Totally complex submanifolds of a complex Grassmann manifold of* 2*-planes*, (English summary) Diff. Geom. Appl. **44** (2016), 30–51.

[24] J. A. Wolf, Complex homogeneous contact manifolds and quaternionic symmetric spaces, J. Math. Mech., **14** (1965), 1033-1047.