平均曲率流の 2 つの単調性公式の関係

國川 慶太

M^n を n 次元の C^∞ 級多様体とし (コンパクト性は仮定しない). はめ込みの族 $x_t = x(\cdot,t) : M \times (a,b) \to \mathbf{R}^N$ が平均曲率流であるとは

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^\perp = \vec{H}$$

を満たすことをいう. このとき時刻とともに動く像を $M_t = x_t(M) \subset \mathbf{R}^N$ と表し, これを平均曲率流の時刻 $t \in (a,b)$ における time-slice と言ったりする. さらに各 time-slice を積み重ねたもの

$$\mathcal{M} := \bigcup_{t\in(a,b)} M_t \times \{t\} \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$$

を平均曲率流の space-time track という.

Huisken [Hu90] は平均曲率流の特異点を調べるため, 次のような積分量

$$\int_{M_t} \Phi \mathrm{d}\mu_t, \quad \text{where} \ \ \Phi(x,t) = \frac{1}{(-4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x|^2}{4t}} \quad (t<0),$$

を導入し, 有名な単調性公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{M_t} \Phi \mathrm{d}\mu_t = -\int_{M_t} \left|\vec{H} - \frac{x^\perp}{2t}\right|^2 \Phi \mathrm{d}\mu_t = -\int_{M_t} |\vec{H} - \nabla^\perp \psi|^2 \Phi \mathrm{d}\mu_t \leq 0$$

を導いた (ただし各時刻で Huisken の積分量が有界であることを仮定しておく必要がある). ここで, 最右辺に現れる ψ は

$$\psi_r := \log(\Phi r^n) := \psi + n\log r = \frac{|x|^2}{4t} - \frac{n}{2}\log\left(\frac{-4\pi t}{r^2}\right)$$

により定義される関数であり, これは後で使う.

一方, Ecker [Ec01] は別の積分量

$$\mathcal{A}(\mathcal{M}\cap E_r) = \iint_{\mathcal{M}\cap E_r} |\nabla\psi|^2 + |\vec{H}|^2\psi_r \quad (r>0)$$

を定めている. ここで, E_r は heat-ball と呼ばれており,

$$E_r := \{(x,t) \in \mathbf{R}^N \times (-\infty,0) \mid \psi_r > 0\} \subset \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$$

として定義される, 時空のボールである. 簡単な計算により, E_r は

$$E_r = \bigcup_{-\frac{r^2}{4\pi}<t<0} B_{R_r(t)} \times \{t\}, \quad \text{where} \ \ R_r(t) := \sqrt{2nt\log\left(\frac{-4\pi t}{r^2}\right)}$$

The author was supported by JSPS KAKENHI Grant Number JP19K14521.

のように書けることがわかる．このように定義された (局所的な) 積分量に対して, Ecker [Ec01] は局所単調性公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{\mathcal{A}(\mathcal{M}\cap E_r)}{r^n}\right)=\frac{n}{r^{n+1}}\iint_{\mathcal{M}\cap E_r}|\vec{H}-\nabla^{\perp}\psi|^2\geq 0.$$

を導き, さらに Huisken の積分量と

$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{A}(\mathcal{M}\cap E_r)}{r^n}=\Theta(\mathcal{M},0,0):=\lim_{t\to 0}\int_{M_t}\Phi\mathrm{d}\mu_t.$$

という関係にあることを示した．この意味で, Ecker の積分量は Huisken の積分量を局所化したものになっている．また, 実は self-shrinker 上では Ecker と Huisken の積分量は極限を取ることなく, 完全に一致することも言える．

この講演では平均曲率流の古代解に対して, Ecker と Huisken の積分量が「無限遠方」でも一致することを報告する．ここで, 古代解とは時刻 $(-\infty,0)$ で定義された平均曲率流の解のことであり, 例えば極小部分多様体, self-shrinker, translating soliton などがそうである．古代解が $\mathbf{R}^N\times(-\infty,0)$ で well-defined とは, 各 M_t, $t\in(-\infty,0)$ が $\mathbf{R}^N$ で境界を持たず, $\mathrm{Vol}(M_t\cap B_{2\sqrt{-2nt}})<\infty$ となっている状況を言う (つまり “普通” の状況ということである).

Theorem 0.1. $\mathcal{M}$ を $\mathbf{R}^N\times(-\infty,0)$ で *well-defined* な平均曲率流の古代解で

$$\int_{M_t}\Phi\mathrm{d}\mu_t<\infty\quad \textit{for all}\ \ t<0$$

を満たすものとする．このとき

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\mathcal{A}(\mathcal{M}\cap E_r)}{r^n}=\lim_{t\to-\infty}\int_{M_t}\Phi\mathrm{d}\mu_t$$

が成り立つ．

Ecker と Huisken の積分量は, 定義を見ただけではどのような意味があるのかわかりづらいように思う．講演では, それぞれの積分量が平均曲率流の研究の中でどのように応用されているかなどを述べ, それをもって各積分量の説明とする予定である．

References

[Ec01] K. Ecker, *A local monotonicity formula for mean curvature flow*, Ann. Math. **154** (2001), 503–525.

[Hu90] G. Huisken, *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*, J. Differential Geom. **31** (1990), 285–299.

Tohoku University, AIMR., 2-1-1 Katahira, Sendai, 980-8577.

Email address: keita.kunikawa.e2@tohoku.ac.jp