コンパクトLie群とコンパクト対称空間の極大対蹠集合

田崎博之
(筑波大学)

本講演の内容は田中真紀子さん保倉理美さんとの共同研究に基づいている。コンパクト Lie 群とコンパクト対称空間の極大対蹠集合の分類を求める手順を解説する。講演ではさらにその手順の実行例をいくつか挙げたい。

1 極地と対蹠集合

M をコンパクト Riemann 対称空間とし、$x \in M$ における点対称を s_x で表す。部分集合 $S \subset M$ が**対蹠集合**であるとは、任意の $x, y \in S$ について $s_x(y) = y$ が成り立つことである。$\#_2 M = \max\{|A| \mid A : \text{対蹠集合}\}$ によって $\#_2 M$ を定め、$\#_2 M$ を M の **2-number** と呼ぶ。2-number を与える対蹠集合を**大対蹠集合**という。大対蹠集合は包含関係に関して極大になるが、極大対蹠集合が大対蹠集合になるとは限らない。集合 X と写像 $f : X \to X$ に対して

$$F(f, X) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

によって、f の X における**不動点集合** $F(f, X)$ を定める。M の点 o における点対称 s_o の不動点集合 $F(s_o, M)$ の連結成分を**極地**と呼ぶ。極地は全測地的部分多様体になることがわかる。一点のみの極地を**極**と呼ぶ。極における点対称は s_o に一致することもわかる。特に極地はコンパクト対称空間になる。これらの概念は Chen-Nagano が導入したものである。

対蹠集合および極地の例を挙げる。$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の原点中心で半径 r の n 次元球面 $S^n(r)$ の点 x に対して、$F(s_x, S^n(r)) = \{\pm x\}$ となることがわかる。$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{H}$ とする。係数体 $\boldsymbol{K}$ の n 次元射影空間 $P^n(\boldsymbol{K})$ の点 x に対して、$F(s_x, P^n(\boldsymbol{K})) = \{x\} \cup P^{n-1}(\boldsymbol{K})$ が成り立つ。コンパクト Riemann 対称空間 M_1, M_2 とそれらの点 x_1, x_2 に対して、$F(s_{(x_1,x_2)}, M_1 \times M_2) = F(s_{x_1}, M_1) \times F(s_{x_2}, M_2)$ が成り立つ。これらは点対称の定め方より容易にわかる。

M の極以外の極地が一つだけのとき、すなわち

$$F(s_o, M) = \{o, o_1, \ldots, o_a\} \cup M_1^+$$

が成り立つとき、各 i について $s_o = s_{o_i}$ が成り立ち、M の極大対蹠集合 (MAS) と M_1^+ の MAS は $\{o, o_1, \dots, o_a\} \cup A \leftrightarrow A$ によって一対一に対応する。この対応は合同類も対応する。この手法を適用できる例を挙げておこう。$\tilde{M} = S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2)$ はコンパクト対称空間であり、$M = (S^{n_1}(r_1) \times S^{n_2}(r_2))/\{\pm 1\}$ もコンパクト対称空間である。$\tilde{M} \to M\ ; (x, y) \mapsto [x, y]$ を自然な射影とすると、被覆変換と点対称は可換になり、$F(s_{[x,y]}, M) = \{[x, \pm y]\} \cup (S^{n_1-1}(r_1) \times S^{n_2-1}(r_2))/\{\pm 1\}$ が成り立つ。極以外の極地は一つだけであり、上の手法を適用できる。これを繰り返すことにより、$\mathbb{R}^{n_1+1}$ の直交基底 $x_1, \dots, x_{n_1+1}$ と $\mathbb{R}^{n_2+1}$ の直交基底 $y_1, \dots, y_{n_2+1}$ が存在して、$\{[x_1, \pm y_1], \dots, [x_k, \pm y_k]\}$ は M の MAS になる。ただし、$k = \min\{n_1, n_2\} + 1$ である。さらにこの MAS は合同を除いて一意的である。一般の場合は事情はもっと複雑になる。まずコンパクト Lie 群の場合を考え、一般のコンパクト対称空間はコンパクト Lie 群に埋め込むことで、コンパクト Lie 群の MAS の分類結果を使ってコンパクト対称空間の MAS の分類を考える。

コンパクト Lie 群には両側不変 Riemann 計量が存在し、両側不変 Riemann 計量に関してコンパクト Lie 群はコンパクト Riemann 対称空間になる。コンパクト Lie 群 G の点対称は

$$s_x(y) = xy^{-1}x \quad (x, y \in G)$$

と表せる。このように点対称を代数的に表現できる。コンパクト Lie 群を Riemann 対称空間とみなすことにより、その代数構造を幾何学的観点から調べることができる。G の単位元を含む極大対蹠集合 A をとると、A は G の Abel 部分群になることがわかる。このことより、G の極大対蹠集合の分類は極大対蹠部分群の分類に帰着する。なお、有限 Abel 群の基本定理より $A \cong \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ が成り立つ。G の単位元の点対称の不動点集合は

$$F(s_e, G) = \{x \in G \mid x^2 = e\} = \{e, o_1, \dots, o_a\} \cup \bigcup_{j=1}^{b} M_j^+$$

と表せるとする。M_j^+ は $x_j \in M_j^+$ によって $\{g x_j g^{-1} \mid g \in G_0\}$ と表せ、G の極地になる。ここで G_0 は G の単位連結成分である。A は G の極大対蹠部分群であり、各 i について $s_e = s_{o_i}$ なので、$\{e, o_1, \dots, o_a\} \subset A$ が成り立つ。A の極大性よりある j が存在して $A \cap M_j^+ \neq \emptyset$ が成り立つ。A を共役なものに取り換えることにより $x_j \in A \cap M_j^+$ が成り立つようにできる。A は Abel 群なので A は G 内の x_j の中心化部分群 $Z_{x_j}(G)$ に含まれる。したがって、A は $Z_{x_j}(G)$ の極大対蹠部分群である。すなわち各 $Z_{x_j}(G)$ の極大対蹠部分群は G の極大対蹠部分群の候補になる。これより、G の極大対蹠部分群の共役類を分類するためには、各 $Z_{x_j}(G)$ の極大対蹠部分群の共役類を分類することが基本になる。この方針に基づいて次元に関する帰納法によってコンパクト Lie 群の極大対蹠部分群の共役類を分類が可能になる。

上記の設定において各 M_j^+ は誘導計量に関してコンパクト Riemann 対称空間になる。極ではない極地がただ一つのときは、G の極大対蹠部分群の分類と M_1^+ の

極大対蹠集合の分類は完全に一対一に対応する。極ではない極地が二つ以上ある場合はこれほど単純ではないが、次のように考えることができる。G の極大対蹠部分群の分類結果が $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_b$ であるとする。A を M_j^+ の極大対蹠集合とする。$M_j^+ \subset F(s_e, G)$ であることから、$\{e\} \cup A$ は G の対蹠集合になる。そこで、$\{e\} \cup A$ を含む G の極大対蹠集合 $\tilde{A}$ をとる。すると、$\tilde{A}$ は G の極大対蹠部分群になり、ある i に対して $\tilde{A}$ は $\tilde{A}_i$ に共役になる。A の M_j^+ における極大性より $A = \tilde{A} \cap M_j^+$ となり、$\tilde{A} \cap M_j^+$ は $\tilde{A}_i \cap M_j^+$ と M_j^+ において合同になることがわかる。したがって、M_j^+ の極大対蹠集合は $\tilde{A}_1 \cap M_j^+, \ldots, \tilde{A}_b \cap M_j^+$ のいずれかに M_j^+ において合同になる。これらは極大対蹠集合の候補になり、実際に極大対蹠集合になるかどうか確認することにより、M_j^+ の極大対蹠集合の合同類の分類が可能になる。

以上の方針により、コンパクト Lie 群およびその極地として実現されるコンパクト Riemann 対称空間の極大対蹠集合の分類のいくつか例を講演では解説したい。