対称空間論における双対性の拡張とその応用

馬場 蔵人（東京理科大学）*
井川 治（京都工芸繊維大学）・笹木 集夢（東海大学）との共同研究

概要. 対称空間論において，コンパクト型リーマン対称空間の局所同型類の全体と非コンパクト型リーマン対称空間の全体の間には双対とよばれる一対一対応があることが知られている．また，重複度付き制限ルート系はコンパクト型リーマン対称空間の局所同型類を一意に定めることから，コンパクト型リーマン対称空間（の局所同型類），非コンパクト型リーマン対称空間，重複度付き制限ルート系が三位一体として捉えられるといえよう．

本研究では，この一般化として可換なコンパクト対称三対，擬リーマン対称対，重複度付き対称三対が三位一体であることを説明する．さらに，この関係を用いて Berger による擬リーマン対称対の分類の（シンプルな）別証明を与える．本研究の詳細については [1], [2], [3] を参照.

1　可換なコンパクト対称三対と擬リーマン対称対

$\mathfrak{g}_u$ を半単純コンパクトリー環とし，θ_1, θ_2 を $\mathfrak{g}_u$ 上の対合とする．このとき，三つ組 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ は半単純コンパクト対称三対とよばれる．半単純コンパクト対称三対の全体に次の同値関係 $\equiv$ を定める：$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \equiv (\mathfrak{g}'_u, \theta'_1, \theta'_2) \overset{\text{def}}{\iff}$ リー環の同型写像 $\varphi : \mathfrak{g}_u \to \mathfrak{g}'_u$ で $\theta'_i = \varphi\theta_i\varphi^{-1}$ $(i = 1, 2)$ を満たすものが存在する．また，半単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ が $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ を満たすとき，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ は可換な半単純コンパクト対称三対とよばれる．同値関係 $\equiv$ はコンパクト対称三対の可換性と整合していることに注意する．つまり，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ が可換ならばこれと同値な半単純コンパクト対称三対も可換である．可換な半単純コンパクト対称三対の全体から成る集合を $\mathcal{A}$ で表す．また，コンパクト型リーマン対称対 $(\mathfrak{g}_u, \theta)$ は $(\mathfrak{g}_u, \theta, \theta)$ によって可換な半単純コンパクト対称三対と見なす.

一方，$\mathfrak{g}$ を実半単純リー環とし，σ を $\mathfrak{g}$ 上の対合とする．このとき，$(\mathfrak{g}, \sigma)$ は半単純擬リーマン対称対とよばる．半単純擬リーマン対称対の全体に次の同値関係 $\equiv$ を定める：$(\mathfrak{g}, \sigma) \equiv (\mathfrak{g}', \sigma') \overset{\text{def}}{\iff}$ リー環の同型写像 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ で $\sigma' = \varphi\sigma\varphi^{-1}$ を満たすものが存在する．ここで，σ と可換な $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合が存在することが知られていることに注意する ([4])．半単純擬リーマン対称対の全体から成る集合を $\mathcal{B}$ で表す．また，σ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合であるときは，$(\mathfrak{g}, \sigma)$ は非コンパクト型リーマン対称対を与えており，σ と可換な Cartan 対合は σ 自身である.

1.1　一般化された双対性

以下では，$\mathcal{A}/_\equiv$ と $\mathcal{B}/_\equiv$ の間に一対一対応を構成する.

① **写像 $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ の構成：** $\mathfrak{g} := \mathfrak{g}_u^{\theta_1} \oplus \sqrt{-1}\mathfrak{g}_u^{-\theta_1} (\subset \mathfrak{g}_u^{\mathbb{C}})$ は θ_i 不変な半単純リー環を与える [1]. $\sigma := \theta_2^{\mathbb{C}}|_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ で定めたとき，$(\mathfrak{g}, \sigma)$ は半単純擬リーマン対称対となる．したがって，$\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}; (\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \mapsto (\mathfrak{g}, \sigma)$ が定義された．ここで，$\theta := \theta_1^{\mathbb{C}}|_{\mathfrak{g}} \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ は σ と可換な Cartan 対合となっていることに注意する.

*E-mail: baba_kurando@ma.noda.tus.ac.jp
[1]**記号** 集合 $\mathfrak{l}$ と写像 $f : \mathfrak{l} \to \mathfrak{l}$ に対して，$\mathfrak{l}^f = \{X \in \mathfrak{l} \mid f(X) = X\}$ とおく.

② **写像** $\Psi:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ **の構成：** $\theta\in\mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$ を σ と可換な Cartan 対合とする．このとき，$\mathfrak{g}_u:=\mathfrak{g}^\theta\oplus\sqrt{-1}\mathfrak{g}^{-\theta}(\subset\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ は σ,θ 不変な半単純コンパクトリー環を与える．$\theta_1:=\theta^{\mathbb{C}}|_{\mathfrak{g}_u},\theta_2:=\sigma^{\mathbb{C}}|_{\mathfrak{g}_u}\in\mathrm{Inv}(\mathfrak{g}_u)$ で定めると，$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ は半単純コンパクト対称三対となる．したがって，$\Psi=\Psi_\theta:\mathcal{B}\to\mathcal{A};(\mathfrak{g},\sigma)\mapsto(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ が定義された．

③ **対応** $\mathcal{A}/_\equiv\xleftrightarrow{1:1}\mathcal{B}/_\equiv$ **の構成：** Φ が誘導する $\mathcal{A}/_\equiv$ から $\mathcal{B}/_\equiv$ への写像を $\widetilde{\Phi}$ で表す．また，Ψ が誘導する $\mathcal{B}/_\equiv$ から $\mathcal{A}/_\equiv$ への写像を $\widetilde{\Psi}$ で表す．このとき，$\widetilde{\Psi}\widetilde{\Phi}=\mathrm{id}$ および $\widetilde{\Phi}\widetilde{\Psi}=\mathrm{id}$ を得る．Ψ の構成には σ と可換な Cartan 対合 θ を用いたが，このような Cartan 対合の全体には $\mathrm{Int}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^\sigma)$ 共役性が成り立つことから，$\widetilde{\Psi}$ は θ の取り方に依存しないことが示される．

以上の議論より，次の結果を得る．

定理 A (一般化された双対性)**.** $\widetilde{\Phi}$ および $\widetilde{\Psi}$ は $\mathcal{A}/_\equiv$ と $\mathcal{B}/_\equiv$ の間に自然な一対一対応を与える．特に，これらの対応はコンパクト型リーマン対称対と非コンパクト型リーマン対称対の間に成り立つ双対性の一般化になっている．

以下において，可換な半単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ と半単純擬リーマン対称対 $(\mathfrak{g},\sigma)$ に対して $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*=\widetilde{\Phi}(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2),(\mathfrak{g},\sigma)^*=\widetilde{\Psi}(\mathfrak{g},\sigma)$ と表す．また，一般に $\mathfrak{g}_u^{\theta_i}(i=1,2)$ や $\mathfrak{g}^\sigma,\mathfrak{g}^\theta$ は半単純とは限らないが，リーマン対称対に対する双対性は $\mathfrak{g}_u$ をコンパクトリー環，$\mathfrak{g}$ を実簡約リー環の場合に自然に拡張して考えることができるので次の結果を得る．（その場合の双対も同じ記号 $*$ で表す）．

系 1. $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\in\mathcal{A}/_\equiv$ に対して，$(\mathfrak{g},\sigma)=(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$ とする．θ を σ と可換な Cartan 対合とする．このとき，$(\mathfrak{g},\theta)=(\mathfrak{g}_u,\theta_1)^*$ および $(\mathfrak{g}^\sigma,\theta)=(\mathfrak{g}_u^{\theta_2},\theta_1)^*$ が成り立つ．

2 可換なコンパクト対称三対と重複度付き対称三対

2.1 Matsuki の分類結果

Matsuki ([13]) によって以下で定義される同値関係 $\sim$ に関して (可換とは限らない) 半単純コンパクト対称三対の分類が与えられた：$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\sim(\mathfrak{g}'_u,\theta'_1,\theta'_2)\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ リー環の同型写像 $\varphi:\mathfrak{g}_u\to\mathfrak{g}'_u$ と内部自己同型写像 $\tau\in\mathrm{Int}(\mathfrak{g}'_u)$ で $\theta'_1=\varphi\theta_1\varphi^{-1},\theta'_2=\tau(\varphi\theta_2\varphi^{-1})\tau^{-1}$ を満たすものが存在する．明らかに $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\equiv(\mathfrak{g}'_u,\theta'_1,\theta'_2)$ ならば $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\sim(\mathfrak{g}'_u,\theta'_1,\theta'_2)$ が成り立ち，同値関係 $\sim$ はコンパクト対称三対の可換性と整合していないことに注意する．また, 半単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ が既約であるとは $\mathfrak{g}_u$ の θ_1,θ_2 不変なイデアルは自明なものしかないときをいう．特に，$\mathfrak{g}_u$ が単純であれば $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ は既約である．任意の半単純コンパクト対称三対は既約なものに分解できることが示される．Matsuki の分類結果を説明するために半単純コンパクト対称三対全体に対して次の同値関係 $\simeq$ を定める：$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\simeq(\mathfrak{g}'_u,\theta'_1,\theta'_2)\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ 二つのリー環の同型写像 $\varphi_1,\varphi_2:\mathfrak{g}_u\to\mathfrak{g}'_u$ で $\theta'_1=\varphi_1\theta_1\varphi_1^{-1},\theta'_2=\varphi_2\theta_2\varphi_2^{-1}$ を満たすものが存在する．明らかに $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\sim(\mathfrak{g}'_u,\theta'_1,\theta'_2)$ ならば $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\simeq(\mathfrak{g}'_u,\theta'_1,\theta'_2)$ である．また，次の定理は本質的には Helgason ([8]) による．

定理 2. $\mathfrak{g}_u$ をコンパクト単純リー環とし，その上の二つの対合 θ,θ' に対して次は同値である：

(1) $\mathfrak{g}_u$ の自己同型写像 φ で $\theta'=\varphi\theta\varphi^{-1}$ となるものが存在する．

(2) θ,θ' の固定部分環はリー環として互いに同型である．

単純コンパクト対称三対の $\simeq$ に関する同値類の全体は定理 2 より単純コンパクトリー環 $\mathfrak{g}_u$ とその上の対合の固定部分環の分類 (表 1) に帰着される．

表 1: Fixed point algebras of involutions

$\mathfrak{g}_u$	Fixed point algebra
$\mathfrak{su}(n)$	$\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(n/2)$ (n: even) , $\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q))$ $(p+q=n)$
$\mathfrak{so}(n)$	$\mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q)$ $(p+q=n \neq 2,4)$, $\mathfrak{u}(n/2)$ ($n \geq 6$, even)
$\mathfrak{sp}(n)$	$\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q)$ $(p+q=n)$
$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{sp}(4)$, $\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2)$, $\mathfrak{f}_4$
$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{su}(8)$, $\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2)$
$\mathfrak{e}_8$	$\mathfrak{so}(16)$, $\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{so}(2)$
$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2)$, $\mathfrak{so}(9)$
$\mathfrak{g}_2$	$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$

単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ の $\simeq$ に関する同値類を $[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]_\simeq$ と表す．さらに，Matsuki ([13]) によって $[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]_\simeq$ の $\sim$ に関する完全代表系が決定された．

例 1. $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{so}(4m)\,(m \geq 3)$ とする．$\mathfrak{g}_u$ 上の対合 θ, θ' を次で定める：

$$\theta(X) = J_{2m} X J_{2m}^{-1}, \quad \theta'(X) = J'_{2m} X (J'_{2m})^{-1} \quad (X \in \mathfrak{g}_u).$$

ただし，

$$J_{2m} = \left(\begin{array}{c|c} & I_{2m} \\ \hline -I_{2m} & \end{array}\right), \quad J'_{2m} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & I_{2m-1} & \\ & & & -1 \\ \hline -I_{2m-1} & & & \\ & 1 & & \end{array}\right) \quad \text{(all blank entries being zero).}$$

このとき，$(\mathfrak{g}_u, \theta, \theta) \not\sim (\mathfrak{g}_u, \theta, \theta')$ であり，コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ で $\mathfrak{g}_u^{\theta_1} \simeq \mathfrak{g}_u^{\theta_2} \simeq \mathfrak{u}(2m)$ を満たすものは，$(\mathfrak{g}_u, \theta, \theta), (\mathfrak{g}_u, \theta, \theta')$ のいずれかに $\sim$ に関して同値であることがわかる．また，$(\mathfrak{g}_u, \theta, \theta), (\mathfrak{g}_u, \theta, \theta')$ は可換であることも確認できる．

さらに，Matsuki ([13]) は，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ の $\sim$ に関する同値類の可換化可能性についても明らかにした．ここで，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ が可換化可能であるとは，$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ と $\sim$ に関して同値な可換なコンパクト対称三対が存在するときをいう．実際，次の三つの型を除いて $[(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)]_\sim$ は可換化可能である：

- $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{so}(2m), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q), \mathfrak{u}(m))$ (p: odd, $p \neq m$)
- $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{su}(2m), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p) \oplus \mathfrak{u}(q)), \mathfrak{sp}(m))$ (p: odd, $p \neq m$)
- $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{so}(8), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q), \kappa(\mathfrak{so}(r) \oplus \mathfrak{so}(s)))$ ($q, s = 1$ or 3, κ: 位数 3 の外部自己同型)

2.2 可換な単純コンパクト対称三対と重複度付き対称三対の対応

Ikawa ([10]) は抽象的な重複度付き対称三対の概念を定義した（定義の詳細は付録 A を参照）．ここでは，可換な単純コンパクト対称三対と重複度付き対称三対の対応について説明する．実際，

可換な単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ から重複度付き対称三対が以下のように構成できる．θ_1 と θ_2 の可換性から $\mathfrak{g}_u$ の θ_1,θ_2 による同時固有空間分解を得る：

$$\mathfrak{g}_u=\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\oplus\mathfrak{g}_u^{-\theta_1}=\mathfrak{g}_u^{\theta_2}\oplus\mathfrak{g}_u^{-\theta_2}=(\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2})\oplus(\mathfrak{g}_u^{-\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{-\theta_2})\oplus(\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{-\theta_2})\oplus(\mathfrak{g}_u^{-\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2}).$$

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}_u^{-\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{-\theta_2}$ 内の極大可換部分空間とする．このとき，$\alpha\in\mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)(\subset\mathfrak{g}_u^{\mathbb{C}})$ を次で定める：

$$\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)=\{X\in\mathfrak{g}_u^{\mathbb{C}}\mid[H,X]=\sqrt{-1}\langle\alpha,H\rangle X\ (H\in\mathfrak{a})\}.$$

ただし，$\langle,\rangle$ は $\mathfrak{a}$ 上の不変内積を表す．このとき，$\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)\ (\alpha\in\mathfrak{a})$ は $\theta_1\theta_2$ 不変であるから $\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)$ の $\theta_1\theta_2$ 分解 $\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)=\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)^{\theta_1\theta_2}\oplus\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)^{-\theta_1\theta_2}$ を得る．このとき，次で定義される $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$ は $\mathfrak{a}$ 上の対称三対となる．

$$\begin{aligned}\tilde{\Sigma}&=\{\alpha\in\mathfrak{a}-\{0\}\mid\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)\neq\{0\}\},\\ \Sigma&=\{\alpha\in\tilde{\Sigma}\mid\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)^{\theta_1\theta_2}\neq\{0\}\},\\ W&=\{\alpha\in\tilde{\Sigma}\mid\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)^{-\theta_1\theta_2}\neq\{0\}\}.\end{aligned}$$

特に，$\tilde{\Sigma},\Sigma$ はルート系となる．さらに，$m,n:\tilde{\Sigma}\to\mathbb{R}_{\geq0}$ を次で定めたとき，$(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)$ は $\mathfrak{a}$ 上の重複度付き対称三対となる：任意の $\alpha\in\tilde{\Sigma}$ に対して，

$$m(\alpha)=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)^{\theta_1\theta_2},\quad n(\alpha)=\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{g}_u(\mathfrak{a},\alpha)^{-\theta_1\theta_2}.$$

なおこの構成法より，$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ と $(\mathfrak{g}_u,\theta_2,\theta_1)$ は同じ重複度付き対称三対を定めることがわかる．また，次の結果は [10, Theorem 4.33] の精密化に相当する．

定理 3. $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2),(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')$ を二つの可換な単純コンパクト対称三対とし，それぞれに付随する重複度付き対称三対を $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n),(\tilde{\Sigma}',\Sigma',W';m',n')$ で表す．このとき，$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\sim(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')$ (または $(\mathfrak{g}_u,\theta_2,\theta_1)\sim(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')$) となるための必要十分条件は，$(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)\sim(\tilde{\Sigma}',\Sigma',W';m',n')$ となることである．

さらに，同値関係 $\equiv$ に関しては次の結果が証明される．

定理 B. $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2),(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')$ を二つの可換な単純コンパクト対称三対とし，それぞれに付随する重複度付き対称三対を $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n),(\tilde{\Sigma}',\Sigma',W';m',n')$ で表す．$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\sim(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')$ を仮定する．このとき，$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\equiv(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')$ と $(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)\equiv(\tilde{\Sigma}',\Sigma',W';m',n')$ は同値である．

定理 B の証明には次の命題が重要となる．

命題 4. $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2),(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')$ を二つの可換な単純コンパクト対称三対とし，$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\sim(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')$ を仮定する．このとき，$\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2}$ と $\mathfrak{g}_u^{\theta_1'\theta_2'}$ がリー環として同型であれば $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\equiv(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')$ が成り立つ．

以上の議論より $\equiv$ に関する可換な単純コンパクト対称三対の同値類の集合 $\{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\mid\theta_1\theta_2=\theta_2\theta_1\}/_{\equiv}$ は，$\simeq$ に関する単純コンパクト対称三対の同値類の集合 $\{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\}/_{\simeq}$ から出発して Matsuki の分類結果および重複度付き対称三対の分類結果を経て与えられる (図 1).

図 1: $\equiv$ に関する分類へのアプローチ

$$\begin{tikzcd}
\{(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)\}/_{\equiv} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Thm. B}"] & \{(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)\}/_{\sim} \arrow[l] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Thm. 3}"] \\
\{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2) \mid \theta_1\theta_2=\theta_2\theta_1\}/_{\equiv} & \{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2) \mid \theta_1\theta_2=\theta_2\theta_1\}/_{\sim} \arrow[l] \\
 & \{(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\}/_{\simeq} \arrow[u, dashed, "\text{Matsuki}"]
\end{tikzcd}$$

例 2. $\mathfrak{g}_u=\mathfrak{so}(4m)\,(m\geq 3)$ とする．例 1 の結果をもとに $[(\mathfrak{so}(4m),\mathfrak{u}(2m),\mathfrak{u}(2m))]_{\simeq}$ の $\equiv$ に関する完全代表系を与える．

- $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\sim(\mathfrak{g}_u,\theta,\theta)$ の場合：

  対応する重複度付き対称三対は $(C_m,C_m,\emptyset;m,n)$ と $\sim$ 同値である．重複度付き対称三対の分類結果より $(C_m,C_m,\emptyset;m,n)$ と $\sim$ 同値なものは

$$(C_m,C_m,\emptyset;m,n),\quad (C_m,A_{m-1},W';m',n'),\quad (C_m,C_i\cup C_{m-i},W_i;m_i,n_i)\quad (1\leq i\leq m-1) \tag{2.1}$$

  に限るので，$\{(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')\mid(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')\sim(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\}/_{\equiv}$ の完全代表系は (2.1) によって特徴付けられる可換な単純コンパクト対称三対となる．

- $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\sim(\mathfrak{so}(4m),\theta,\theta')$ の場合：対応する重複度付き対称三対は $(\text{I-}BC_{m-1}\text{-}A_1^{m-1};m,n)$ である．よって，これと $\sim$ 同値な重複度付き対称三対

$$(\text{I-}BC_{m-1}\text{-}A_1^{m-1};m,n),\quad ((\text{I'-}BC_{m-1}\text{-}A_1^{m-1})_s;m'',n'')\quad (1\leq s\leq m)$$

  によって $\{(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')\mid(\mathfrak{g}_u,\theta_1',\theta_2')\sim(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\}/_{\equiv}$ の完全代表系が特徴付けられる．

	Symmetric triad	$\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2}$
$\theta_1\sim\theta_2$	$(C_m,C_m,\emptyset;m,n)$	$\mathfrak{so}(4m)$
	$(C_m,A_{m-1},W';m',n')$	$\mathfrak{u}(2m)$
	$(C_m,C_i\cup C_{m-i},W_i;m_i,n_i)$	$\mathfrak{so}(4i)\oplus\mathfrak{so}(4m-4i)$
$\theta_1\not\sim\theta_2$	$(\text{I-}BC_{m-1}\text{-}A_1^{m-1};m,n)$	$\mathfrak{so}(4m-2)\oplus\mathfrak{so}(2)$
	$((\text{I'-}BC_{m-1}\text{-}A_1^{m-1})_s;m'',n'')$	$\mathfrak{so}(4s+2)\oplus\mathfrak{so}(4m-4s-2)$

$\mathfrak{g}_u$ が単純でない場合，可換な半単純コンパクト対称三対の分類について注意を与える．このような半単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ で既約なものは次の四つの型に限られることが知られている (cf. [13, Proposition 2.2])：

- $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\equiv(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u},\tau,\tau_{\theta_0})$
- $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\equiv(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u},\tau,\delta_{\theta_0})$
- $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\equiv(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u},\delta_{\theta_0},\tau)$
- $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)\equiv(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u},\tau_{(12)(34)},\tau_{(14)(23)})$

ただし，$\mathfrak{u}$ は単純コンパクトリー環を表し，θ_0 はその上の対合とする．また，$\tau, \tau_{\theta_0}, \delta_{\theta_0} \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u})$ は

$$\tau(X,Y) = (Y,X), \quad \tau_{\theta_0}(X,Y) = (\theta_0(Y), \theta_0(X)), \quad \delta_{\theta_0}(X,Y) = (\theta_0(X), \theta_0(Y))$$

で定義され，$\tau_{(12)(34)}, \tau_{(14)(23)} \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u})$ は

$$\tau_{(12)(34)}(X,Y,Z,W) = (Y,X,W,Z), \quad \tau_{(13)(24)}(X,Y,Z,W) = (W,Z,Y,X)$$

とする．

3 半単純擬リーマン対称対の分類

半単純擬リーマン対称空間の局所同型類は Berger([4]) によって分類された．この分類は半単純擬リーマン対称対の分類に帰着される．ここで，半単純擬リーマン対称対 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ が既約であるとは $\mathfrak{g}$ の σ 不変なイデアルは自明なものしかないときをいい，任意の半単純擬リーマン対称対は既約分解することができる．よって，半単純擬リーマン対称対の分類問題では既約なものを分類すれば十分である．この節では，可換なコンパクト対称三対，擬リーマン対称対，重複度付き対称三対が三位一体であるという視点から半単純擬リーマン対称対の分類の系統的な別証明を与える．ここで，擬リーマン対称対の既約性と半単純コンパクト対称三対の既約性は一般化された双対のもとで対応していることが示される．具体的には，既約な半単純擬リーマン対称対 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ の一般化された双対は次で与えられる．

(1) $\mathfrak{g}$: 単純

- (1-a) $\mathfrak{g}$ は複素構造を持たない $\overset{\text{双対}}{\leftrightarrow}$ 可換な単純コンパクト対称三対
- (1-b) $\mathfrak{g}$ は複素構造を持つ $\overset{\text{双対}}{\leftrightarrow}$ $(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}, \tau, \tau_{\theta_0}), (\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}, \tau, \delta_{\theta_0})$

(2) $(\mathfrak{g}, \sigma) \equiv (\mathfrak{g}'\oplus\mathfrak{g}', \tau)$ ($\mathfrak{g}'$: 単純)

- (2-a) $\mathfrak{g}$ は複素構造を持たない $\overset{\text{双対}}{\leftrightarrow}$ $(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}, \delta_{\theta_0}, \tau)$
- (2-b) $\mathfrak{g}$ は複素構造を持つ $\overset{\text{双対}}{\leftrightarrow}$ $(\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{u}, \tau_{(12)(34)}, \tau_{(14)(23)})$

本質的な困難は (1-a) の型の分類にあり，それ以外のものはコンパクト対称対の分類に帰着される．本研究の方針では (1-a) の型の分類を，二つの問題「可換な半単純コンパクト対称三対の分類および一般化された双対性の具体的な記述」に還元して行う．実際，前者は第 2 節，後者は系 1 を用いて解決される．なお，我々の別証明の過程においてコンパクト対称対の分類結果およびリーマン対称対のコンパクト／非コンパクト双対性は既知とする．

3.1 一般化された双対の具体的な記述

同値関係 $\equiv$ に関する可換な単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ の分類結果を踏まえ，一般化された双対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$ は以下の手順によって具体的に記述される．

(Step 1) $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ に対応する重複度付き対称三対を用いてコンパクト対称対 $(\mathfrak{g}_u^{\theta_2}, \theta_1) = (\mathfrak{g}_u^{\theta_2}, \mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2})$ の具体的な表示を決定する．

(Step 2) 系 1 より $(\mathfrak{g}, \theta) = (\mathfrak{g}_u, \theta_1)^*$ と $(\mathfrak{g}^\sigma, \theta_1) = (\mathfrak{g}_u^{\theta_2}, \theta_1)^*$ となるので $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^\sigma)$ が具体的に求まる．

上記の手順を実行すると付録Bのリストが得られる．

例 3. $(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$ は例2における $(\mathfrak{g}_u,\theta,\theta')$ と $\sim$ に関して同値であり対応する重複度付き対称三対が (I-BC_{m-1}-A_1^{m-1}; m,n) となるものとする．

(Step 1) $(\mathfrak{g}_u^{\theta_2},\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2})=(\mathfrak{u}(2m),\mathfrak{u}(2m-1)\oplus\mathfrak{u}(1))$ となることが重複度付き対称三対を用いた計算によって得られ，さらに

$$(\mathfrak{g}_u^{\theta_2},\theta_1)=(\mathfrak{u}(2m),\mathfrak{u}(2m-1)\oplus\mathfrak{u}(1))=(\mathfrak{su}(2m),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2m-1)\oplus\mathfrak{u}(1)))\oplus(\mathfrak{so}(2),\mathfrak{so}(2))$$

と分解される．

(Step 2) $(\mathfrak{g}_u,\theta_1)^*=(\mathfrak{so}^*(4m),\theta)$ および $(\mathfrak{g}_u^{\theta_2},\theta_1)^*=(\mathfrak{su}(2m-1,1)\oplus\mathfrak{so}(2),\theta)$ より

$$(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^\sigma;\mathfrak{g}^\theta)=(\mathfrak{so}^*(4m),\mathfrak{su}(2m-1,1)\oplus\mathfrak{so}(2);\mathfrak{u}(2m)).$$

重複度付き対称三対が他の場合でも同様に計算される．

付録Bのリストにおいて $\mathfrak{g}^\sigma$ が1次元の中心 $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^\sigma)$ を持つ場合，それが $\mathfrak{g}^\theta$ に含まれるときは $\mathfrak{so}(2)$，$\mathfrak{g}^{-\theta}$ に含まれるときは $\mathbb{R}$ でかかれており，このことは θ の取り方に依らない．すなわち，次の命題が成り立つ．

命題 5. $(\mathfrak{g},\sigma)$ を半単純擬リーマン対称対とする．次の条件は σ と可換な Cartan 対合 θ の取り方に依らない：

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^\sigma)\subset\mathfrak{g}^\theta,\quad \mathfrak{z}(\mathfrak{g}^\sigma)\subset\mathfrak{g}^{-\theta}.$$

さらに，次の結果が成り立つ：

定理 C. $\mathfrak{g}$ を単純非コンパクトリー環とする．σ,σ' は $\mathfrak{g}$ 上の対合とし，θ,θ' はそれぞれ σ,σ' と可換な Cartan 対合とする．このとき，次は同値である：

(1) $\mathfrak{g}$ の自己同型写像 φ で $\sigma'=\varphi\sigma\varphi^{-1}$ となるものが存在する．

(2) $\mathfrak{g}^\sigma\simeq\mathfrak{g}^{\sigma'}$ かつ「$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^\sigma)\subset\mathfrak{g}^\theta,\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^{\sigma'})\subset\mathfrak{g}^{\theta'}$ or $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^\sigma)\subset\mathfrak{g}^{-\theta},\mathfrak{z}(\mathfrak{g}^{\sigma'})\subset\mathfrak{g}^{-\theta'}$」が成り立つ．

付録Bのリストが単純擬リーマン対称対の分類を与えていることを説明する．まず準備として非退化な部分リー環に対して指数を定義する．$\mathfrak{g}$ の部分リー環 $\mathfrak{h}$ が非退化であるとは $\mathfrak{g}$ のキリング形式が $\mathfrak{h}$ 上で非退化であるときをいい，その指数を $\mathfrak{g}$ における $\mathfrak{h}$ の指数とよび $i_\mathfrak{g}(\mathfrak{h})$ で表すことにする．特に，$\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^\sigma$ のときは $i_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^\sigma)=\dim(\mathfrak{g}^\theta\cap\mathfrak{g}^\sigma)$ が成り立つ．このとき，次の結果が成り立つ．

定理 D. $\mathfrak{g}$ を単純非コンパクトリー環とし，σ,σ' を $\mathfrak{g}$ 上の対合とする．このとき，次は (1) と (2) は同値である．

(1) $(\mathfrak{g},\sigma)\equiv(\mathfrak{g},\sigma')$

(2) $\mathfrak{g}^\sigma\simeq\mathfrak{g}^{\sigma'}$ かつ $i_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^\sigma)=i_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^{\sigma'})$

ここで，定理 D, (2) で指数に関する条件を除外できないただ一つの例をあげる．

例 4.

$$\begin{cases}(\mathfrak{g},\sigma;\theta)=(\mathfrak{so}(p+2,p+1),\mathfrak{so}(1,1)\oplus\mathfrak{so}(p+1,p);\mathfrak{so}(p+2)\oplus\mathfrak{so}(p+1))\\(\mathfrak{g},\sigma';\theta')=(\mathfrak{so}(p+2,p+1),\mathfrak{so}(2,0)\oplus\mathfrak{so}(p,p+1);\mathfrak{so}(p+2)\oplus\mathfrak{so}(p+1))\end{cases}$$

は $\mathfrak{g}^\sigma\simeq\mathfrak{g}^{\sigma'}$ であるが $i_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^\sigma)\neq i_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^{\sigma'})$ となる．また，$(\mathfrak{g},\sigma)\not\equiv(\mathfrak{g},\sigma')$ であることがこれらの一般化された双対に対応する重複度付き対称三対を比較することで従う．

次の結果は単純擬リーマン対称対の一般化された双対に対応する重複度付き対称三対を調べることによって得られる：

系 6 (Special isomorphisms). (i) (I-B_2) $\equiv$ (I-C_2):

- $(\mathfrak{so}(4,4), \mathfrak{so}(2,4) \oplus \mathfrak{so}(2,0)) \equiv (\mathfrak{so}(4,4), \mathfrak{su}(2,2) \oplus \mathfrak{so}(2))$
- $(\mathfrak{so}(2,6), \mathfrak{so}(2,2) \oplus \mathfrak{so}(0,4)) \equiv (\mathfrak{so}^*(8), \mathfrak{so}^*(4) \oplus \mathfrak{so}^*(4))$

(ii) (I-BC_1-A_1^1) $\equiv$ (I-BC_1-B_1):

- $(\mathfrak{so}^*(8), \mathfrak{su}(1,3) \oplus \mathfrak{so}(2)) \equiv (\mathfrak{so}^*(8), \mathfrak{so}^*(2) \oplus \mathfrak{so}^*(6))$
- $(\mathfrak{so}^*(8), \mathfrak{su}(1,3) \oplus \mathfrak{so}(2)) \equiv (\mathfrak{so}(2,6), \mathfrak{su}(1,3) \oplus \mathfrak{so}(2))$

(iii) (I'-B_2) $\equiv$ (I'-C_2):

- $(\mathfrak{so}(4,4), \mathfrak{so}(3,3) \oplus \mathfrak{so}(1,1)) \equiv (\mathfrak{so}(4,4), \mathfrak{gl}(4,\mathbb{R}))$
- $(\mathfrak{so}(2,6), \mathfrak{so}(1,3) \oplus \mathfrak{so}(1,3)) \equiv (\mathfrak{so}^*(8), \mathfrak{so}(4,\mathbb{C}))$

(iv) $(A_1, A_1, \emptyset) \equiv (B_1, B_1, \emptyset) \equiv (C_1, C_1, \emptyset)$:

- $(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}), \mathfrak{so}(2)) \equiv (\mathfrak{so}(1,2), \mathfrak{so}(0,2) \oplus \mathfrak{so}(1,0)) \equiv (\mathfrak{sp}(1,\mathbb{R}), \mathfrak{u}(1))$

(v) $(A_1, \emptyset, A_1) \equiv (B_1, \emptyset, B_1) \equiv (C_1, \emptyset, C_1)$:

- $(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}), \mathfrak{so}(1,1)) \equiv (\mathfrak{so}(1,2), \mathfrak{so}(1,1) \oplus \mathfrak{so}(0,1)) \equiv (\mathfrak{sp}(1,\mathbb{R}), \mathfrak{gl}(1,\mathbb{R}))$

(vi) $(B_2, B_2, \emptyset) \equiv (C_2, C_2, \emptyset)$:

- $(\mathfrak{so}(2,3), \mathfrak{so}(2,0) \oplus \mathfrak{so}(0,3)) \equiv (\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}), \mathfrak{u}(2))$
- $(\mathfrak{so}(2,4), \mathfrak{so}(2,0) \oplus \mathfrak{so}(0,4)) \equiv (\mathfrak{su}(2,2), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{u}(2)))$
- $(\mathfrak{so}(2,6), \mathfrak{so}(2,0) \oplus \mathfrak{so}(0,6)) \equiv (\mathfrak{so}^*(8), \mathfrak{u}(4))$

(vii) $(B_2, D_2, W) \equiv (C_2, C_1 \cup C_1, W)$:

- $(\mathfrak{so}(2,3), \mathfrak{so}(2,1) \oplus \mathfrak{so}(0,2)) \equiv (\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}), \mathfrak{su}(1,1) \oplus \mathfrak{so}(2))$
- $(\mathfrak{so}(2,4), \mathfrak{so}(2,2) \oplus \mathfrak{so}(0,2)) \equiv (\mathfrak{su}(2,2), \mathfrak{su}(1,1) \oplus \mathfrak{su}(1,1) \oplus \mathfrak{so}(2))$
- $(\mathfrak{so}(2,6), \mathfrak{so}(2,4) \oplus \mathfrak{so}(0,2)) \equiv (\mathfrak{so}^*(8), \mathfrak{su}(2,2) \oplus \mathfrak{so}(2))$

(viii) $(B_2, B_1, W) \equiv (C_2, A_1, W)$:

- $(\mathfrak{so}(2,3), \mathfrak{so}(1,1) \oplus \mathfrak{so}(1,2)) \equiv (\mathfrak{sp}(2,\mathbb{R}), \mathfrak{gl}(2,\mathbb{R}))$
- $(\mathfrak{so}(2,4), \mathfrak{so}(1,3) \oplus \mathfrak{so}(1,1)) \equiv (\mathfrak{su}(2,2), \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{R})$
- $(\mathfrak{so}(2,6), \mathfrak{so}(1,5) \oplus \mathfrak{so}(1,1)) \equiv (\mathfrak{so}^*(8), \mathfrak{su}^*(4) \oplus \mathbb{R})$

(ix) $(A_3, A_3, \emptyset) \equiv (D_3, D_3, \emptyset)$:

- $(\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}), \mathfrak{so}(4)) \equiv (\mathfrak{so}(3,3), \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3))$

(x) $(A_3, A_2, W) \equiv (D_3, A_2, W)$:

- $(\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}), \mathfrak{so}(1,3)) \equiv (\mathfrak{so}(3,3), \mathfrak{so}(3,\mathbb{C}))$

(xi) $(A_3, A_1 \cup A_1, W) \equiv (D_3, D_2, W)$:

- $(\mathfrak{sl}(4,\mathbb{R}), \mathfrak{so}(2,2)) \equiv (\mathfrak{so}(3,3), \mathfrak{so}(1,2) \oplus \mathfrak{so}(2,1))$

(xii) $(BC_1, BC_1, \emptyset) \equiv (BC_1, BC_1, \emptyset)$:

- $(\mathfrak{su}(1,3), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(3))) \equiv (\mathfrak{so}^*(6), \mathfrak{u}(3))$

(xiii) $(BC_1, C_1, W) \equiv (BC_1, C_1, W)$:

- $(\mathfrak{su}(1,3), \mathfrak{su}(1,2) \oplus \mathfrak{su}(0,1) \oplus \mathfrak{so}(2)) \equiv (\mathfrak{so}^*(6), \mathfrak{su}(1,2) \oplus \mathfrak{so}(2))$

参考文献

[1] K. Baba and O. Ikawa, The commutativity of compact symmetric triads and the determination of symmetric triads with multiplicities from two Satake diagmras, in preparation.

[2] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, A duality between symmetric pairs and compact symmetric triads, in preparation.

[3] K. Baba, O. Ikawa and A. Sasaki, An alternative proof for Berger's Classification of semisimple pseudo-Riemannian symmetric pairs from the viewpoint of compact symmetric triads, in preparation.

[4] M. Berger, Les espaces symetriques noncompacts, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **74** (1957), 85–177.

[5] L. Conlon, Applications of affine root systems to the theory of symmetric spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **75** (1969), 610–613.

[6] M.-K. Chuah and J.-S. Huang, Double Vogan diagrams and semisimple symmetric spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **362** (2010), 1721–1750.

[7] M. Flensted-Jensen, Spherical functions of a real semisimple Lie group. A method of reduction to the complex case. J. Funct. Anal., **30** (1978), 106–146.

[8] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Graduate Studies in Mathematics, 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[9] A. G. Helminck, Algebraic groups with a commuting pair of involutions and semisimple symmetric spaces, Adv. in Math., **71** (1988), 21–91.

[10] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions, J. Math. Soc. Japan, **63** (2011), 79–136.

[11] N. Koike, Complex hyperpolar actions with a totally geodesic orbit, Osaka J. Math., **44** (2007), 491–503.

[12] A. Kollross, Duality of symmetric spaces and polar actions, *J. Lie Theory* **21** (2011), 961–986.

[13] T. Matsuki, Classification of two involutions on compact semisimple Lie groups and root systems, J. Lie Theory, **12** (2002), 41–68.

[14] W. Rossmann, The structure of semisimple symmetric spaces. Canad. J. Math., **31** (1979), 157–180.

A 付録：抽象的な重複度付き対称三対

この節では，抽象的な重複度付き対称三対の定義およびその上に定義される同値関係を与える．重複度付き対称三対の概念は可換な単純コンパクト対称三対 $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$ をモデルとしており，θ_1 と θ_2 が $\mathfrak{g}_u$ の内部自己同型写像で移り合うかどうかによって，型が異なる．実際，Ikawa([10]) で定義されているのは $\theta_1 \not\sim \theta_2$ の場合で，この場合の重複度付き対称三対は (I) 型から (III) 型に属するものである．一方，$\theta_1 \sim \theta_2$ の場合に対応するものとして (IV) 型の重複度付き対称三対の概念を [3] で導入した．

A.1 抽象的な重複度付き対称三対 ((I) 型から (III) 型)

定義 7. $\mathfrak{a}$ を内積 $\langle , \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする．$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が $\mathfrak{a}$ 上の対称三対であるとは，次の (1) から (6) までを満たすときをいう．

(1) $\tilde{\Sigma}$ は $\mathfrak{a}$ 上の既約ルート系

(2) Σ は $\mathrm{span}(\Sigma)$ 上のルート系

(3) W は (-1) 倍に関して不変な $\mathfrak{a}$ の空でない部分集合で $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$

(4) $W \cap \Sigma \neq \emptyset$ であり，$\Sigma \cap W = \{\alpha \in \tilde{\Sigma} \mid ||\alpha|| \leq \ell\}$ (ただし，$\ell := \max\{||\alpha|| \mid \alpha \in \Sigma \cap W\}$)

(5) $\alpha \in W$, $\lambda \in \Sigma - W$ に対して，

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{||\alpha||^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in W - \Sigma$$

(6) $\alpha \in W$, $\lambda \in W - \Sigma$ に対して，

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{||\alpha||^2} \text{が奇数} \Leftrightarrow s_\alpha \lambda \in \Sigma - W$$

対称三対の分類により，任意の対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は次のいずれかの型になることが知られている．

- (I) 型：$\Sigma \supset W, \Sigma \neq W$
- (II) 型：$\Sigma \subset W, \Sigma \neq W$
- (III) 型：$\tilde{\Sigma} = \Sigma = W$
- (I') 型：(I) 型ではないが，(I) 型と同値

そこで，これらの対称三対を次の小節でのべる (IV) 型の対称三対と区別して (I) 型から (III) 型の対称三対という．((I') 型は広い意味で (I) 型と考える．)

定義 8. $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を $\mathfrak{a}$ 上の対称三対とする．$m, n : \tilde{\Sigma} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が次の (1) から (4) を満たすとき m, n を $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の重複度といい，$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ を重複度付き対称三対とよぶ．

(1) $m(\lambda) = m(-\lambda), n(\alpha) = n(-\alpha)$ であり，$m(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in \Sigma, n(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha \in W$

(2) $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W, s \in W(\Sigma)$ のとき，$m(\lambda) = m(s\lambda), n(\alpha) = n(s\alpha)$

(3) $\sigma \in W(\tilde{\Sigma}), \lambda \in \tilde{\Sigma}$ のとき，$n(\lambda) + m(\lambda) = n(\sigma\lambda) + m(\sigma\lambda)$

(4) $\lambda \in \Sigma \cap W, \alpha \in W$ のとき，

$$2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{||\alpha||^2}\text{が偶数} \Rightarrow m(\lambda) = m(s_\alpha \lambda), \quad 2\frac{\langle \alpha, \lambda \rangle}{||\alpha||^2}\text{が奇数} \Rightarrow m(\lambda) = n(s_\alpha \lambda)$$

ただし，$W(\tilde{\Sigma})$ と $W(\Sigma)$ はそれぞれ $\tilde{\Sigma}$ と Σ のワイル群を表す．

注意 1. W は $W(\Sigma)$ 不変であることが知られている．定義 8 の条件 (2) はこのことを踏まえてる．

定義 9. $(\tilde{\Sigma}_i, \Sigma_i, W_i; m_i, n_i)$ を $\mathfrak{a}_i$ 上の重複度付き対称三対とする $(i = 1, 2)$．このとき，(I) 型から (III) 型の重複度付き対称三対全体に同値関係 $\sim$ を次で定める：$(\tilde{\Sigma}_1, \Sigma_1, W_1; m_1, n_1) \sim (\tilde{\Sigma}_2, \Sigma_2, W_2; m_2, n_2)$ $\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次の (1) から (4) までを満たす等長線形同型写像 $f : \mathfrak{a}_1 \to \mathfrak{a}_2$ および，$Y \in \Gamma := \{X \in \mathfrak{a}_1 \mid \langle \lambda, X \rangle \in (\pi/2)\mathbb{Z}\, (\lambda \in \tilde{\Sigma}_1)\}$ が存在する．

(1) $f(\tilde{\Sigma}_1) = \tilde{\Sigma}_2$

(2) $\Sigma_2 - W_2 = \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma_1 - W_1, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in W_1 - \Sigma_1, \langle \alpha, 2Y \rangle \in (\pi + 2\pi\mathbb{Z})\}$

(3) $W_2 - \Sigma_2 = \{f(\alpha) \mid \alpha \in W_1 - \Sigma_1, \langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\} \cup \{f(\alpha) \mid \alpha \in \Sigma_1 - W_1, \langle \alpha, 2Y \rangle \in (\pi + 2\pi\mathbb{Z})\}$

(4) $\alpha \in \tilde{\Sigma}_1$ に対して，

$$\langle \alpha, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow m_1(\alpha) = m_2(f(\alpha)), n_1(\alpha) = n_2(f(\alpha)),$$
$$\langle \alpha, 2Y \rangle \in (\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \Rightarrow m_1(\alpha) = n_2(f(\alpha)), n_1(\alpha) = m_2(f(\alpha))$$

A.2 抽象的な重複度付き対称三対 ((IV) 型)

定義 10. $\mathfrak{a}$ を $\langle , \rangle$ を持つ有限次元ベクトル空間とする．$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$ が重複度付き制限ルート系 $(\tilde{\Sigma}; \tilde{m})$ を基とする $\mathfrak{a}$ 上の (IV) 型の重複度付き対称三対であるとは，次の (1) から (2) を満たす $\mathfrak{a}$ 上の既約ルート系 $\tilde{\Sigma}$，重複度付き制限ルート系 $(\tilde{\Sigma}; \tilde{m})$ および $Y \in \Gamma := \{X \in \mathfrak{a} \mid \langle , \lambda, X \rangle \in (\pi/2)\mathbb{Z}(\lambda \in \tilde{\Sigma})\}$ が存在するときをいう．

(1) $\Sigma = \{\lambda \in \tilde{\Sigma} \mid \langle \lambda, 2Y \rangle \in 2\pi\mathbb{Z}\}, W = \tilde{\Sigma} - \Sigma$

(2) $\lambda \in \Sigma, \alpha \in W$ に対して，$m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda), n(\alpha) = \tilde{m}(\alpha)$

さらに，同じ基をもつ $\mathfrak{a}$ 上の (IV) 型の重複度付き対称三対は $\sim$ に関して同値であると定義する．

B 付録：可換なコンパクト対称三対，擬リーマン対称対，重複度付き対称三対の具体的な対応

表 2: 可換なコンパクト対称三対，擬リーマン対称対，重複度付き対称三対の具体的な対応

Case I: $\theta_1 \not\sim \theta_2$.

$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$	$(\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2}, \mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2})$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$ $(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1)^*$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{sp}(4))$	$(\text{I-}F_4; m, n)$	$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{sp}(3,1))$ $(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{su}^*(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$
	$(\text{I'-}F_4; m', n')$	$(\mathfrak{sp}(4), \mathfrak{u}(4))$	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{sp}(4,\mathbb{R}))$ $(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sl}(6,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1), \mathfrak{sp}(4))$	$(\text{II-}BC_2; m, n)$	$(\mathfrak{sp}(4), \mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{sp}(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{sp}(2,2))$ $(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{so}(5,5) \oplus \mathbb{R})$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{sp}(4))$	$(\text{III-}A_2; m, n)$	$(\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{sp}(1,3))$ $(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{f}_{4(4)})$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1), \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\text{I-}BC_2\text{-}B_2; m, n)$	$(\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{u}(5) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{su}(1,5) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ $(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{so}^*(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$
	$(\text{I-}BC_2\text{-}B_2; m', n')$	$(\mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{u}(4)) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{su}(2,4) \oplus \mathfrak{su}(2))$ $(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{so}(6,4) \oplus \mathfrak{so}(2))$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{f}_4)$	$(\text{III-}BC_1; m, n)$	$(\mathfrak{sp}(4), \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(3))$	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{f}_{4(4)})$ $(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{su}^*(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1), \mathfrak{f}_4)$	$(\text{III-}BC_1; m, n)$	$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9))$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{f}_{4(-20)})$ $(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{so}(1,9) \oplus \mathbb{R})$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{su}(8))$	$(\text{I-}F_4; m, n)$	$(\mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{su}(6,2))$ $(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{so}^*(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$
	$(\text{I'-}F_4; m, n)$	$(\mathfrak{su}(8), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(4) \oplus \mathfrak{u}(4)))$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{su}(4,4))$ $(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{so}(6,6) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{u}(1), \mathfrak{su}(8))$	$(\text{I-}C_3; m, n)$	$(\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{u}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{su}(6,2))$ $(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{e}_{6(2)} \oplus \mathfrak{so}(2))$
	$(\text{I'-}C_3; m, n)$	$(\mathfrak{su}(8), \mathfrak{sp}(4))$	$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{su}^*(8))$ $(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{e}_{6(6)} \oplus \mathbb{R})$
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{u}(1))$	$(\text{I-}BC_2\text{-}B_2; m, n)$	$(\mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{e}_{6(-14)} \oplus \mathfrak{so}(2))$ $(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{so}(10,2) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$
	$(\text{I-}BC_2\text{-}B_2; m', n')$	$(\mathfrak{su}(8), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(2) \oplus \mathfrak{u}(6)))$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{e}_{6(2)} \oplus \mathfrak{so}(2))$ $(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{so}^*(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(16))$	$(\text{I-}F_4; m, n)$	$(\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{so}(12,4))$ $(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{e}_{7(-5)} \oplus \mathfrak{su}(2))$
	$(\text{I'-}F_4; m, n)$	$(\mathfrak{so}(16), \mathfrak{u}(8))$	$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{so}^*(16))$ $(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{e}_{7(7)} \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9), \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(3))$	$(\text{III-}BC_1; m, n)$	$(\mathfrak{sp}(3) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{sp}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{sp}(1,2) \oplus \mathfrak{su}(2))$ $(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{so}(4,5))$

表 2: (continued)

$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W; m, n)$	$(\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2}, \mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2})$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$ $(\mathfrak{g}_u, \theta_2, \theta_1)^*$
$(\mathfrak{so}(n), \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q), \mathfrak{so}(r) \oplus \mathfrak{so}(s))$ $(s < q \leq p < r)$	(I-B_s; basic)	$(\mathfrak{so}(p+s) \oplus \mathfrak{so}(q-s), \mathfrak{so}(s) \oplus \mathfrak{so}(p) \oplus \mathfrak{so}(q-s))$	$(\mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{so}(0,s) \oplus \mathfrak{so}(p,q-s))$ $(\mathfrak{so}(r,s), \mathfrak{so}(p,0) \oplus \mathfrak{so}(q-s,s))$
	(I-B_s; non-basic)	$(\mathfrak{so}(q+s) \oplus \mathfrak{so}(p-s), \mathfrak{so}(s) \oplus \mathfrak{so}(q) \oplus \mathfrak{so}(p-s))$	$(\mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{so}(s,0) \oplus \mathfrak{so}(p-s,q))$ $(\mathfrak{so}(r,s), \mathfrak{so}(q,0) \oplus \mathfrak{so}(p-s,s))$
	$((\Gamma\text{-}B_s)_k; m, n)$, $1 \leq k \leq s-1$ $(m(\text{short} \in B_k) \geq m(\text{short} \in B_{s-k}))$	$(\mathfrak{so}(p-s+2k) \oplus \mathfrak{so}(q+s-2k), \mathfrak{so}(k) \oplus \mathfrak{so}(p-s+k) \oplus \mathfrak{so}(s-k) \oplus \mathfrak{so}(q-k))$	$(\mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{so}(s-k,k) \oplus \mathfrak{so}(p-s+k,q-k))$ $(\mathfrak{so}(r,s), \mathfrak{so}(p-s+k,s-k) \oplus \mathfrak{so}(q-k,k))$
	$((\Gamma\text{-}B_s)_k; m, n)$, $1 \leq k \leq s-1$ $(m(\text{short} \in B_{s-k}) \geq m(\text{short} \in B_k))$	$(\mathfrak{so}(q-s+2k) \oplus \mathfrak{so}(p+s-2k), \mathfrak{so}(k) \oplus \mathfrak{so}(q-s+k) \oplus \mathfrak{so}(s-k) \oplus \mathfrak{so}(p-k))$	$(\mathfrak{so}(p,q), \mathfrak{so}(k,s-k) \oplus \mathfrak{so}(p-k,q-s+k))$ $(\mathfrak{so}(r,s), \mathfrak{so}(q-s+k,s-k) \oplus \mathfrak{so}(p-k,k))$
$(\mathfrak{su}(n), \mathfrak{su}(p) \oplus \mathfrak{su}(q) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{su}(r) \oplus \mathfrak{su}(s) \oplus \mathfrak{so}(2))$ $(s < q \leq p < r)$	(I-BC_s-A_1^s; basic)	$(\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p+s) \oplus \mathfrak{u}(q-s)), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(s) \oplus \mathfrak{u}(p)) \oplus \mathfrak{su}(q-s) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{su}(0,s) \oplus \mathfrak{su}(p,q-s) \oplus \mathfrak{so}(2))$ $(\mathfrak{su}(r,s), \mathfrak{su}(p,0) \oplus \mathfrak{su}(q-s,s) \oplus \mathfrak{so}(2))$
	(I-BC_s-A_1^s; non-basic)	$(\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(q+s) \oplus \mathfrak{u}(p-s)), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(s) \oplus \mathfrak{u}(q)) \oplus \mathfrak{su}(p-s) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{su}(s,0) \oplus \mathfrak{su}(p-s,q) \oplus \mathfrak{so}(2))$ $(\mathfrak{su}(r,s), \mathfrak{su}(q,0) \oplus \mathfrak{su}(p-s,s) \oplus \mathfrak{so}(2))$
	$((\Gamma\text{-}BC_s\text{-}A_1^s)_k; m, n)$, $1 \leq k \leq s-1$ $(m(\text{short} \in BC_k) \geq m(\text{short} \in BC_{s-k}))$	$(\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p-s+2k) \oplus \mathfrak{u}(q+s-2k)), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(k) \oplus \mathfrak{u}(p-s+k)) \oplus \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(s-k) \oplus \mathfrak{u}(q-k)) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{su}(s-k,k) \oplus \mathfrak{su}(p-s+k,q-k) \oplus \mathfrak{so}(2))$ $(\mathfrak{su}(r,s), \mathfrak{su}(p-s+k,s-k) \oplus \mathfrak{su}(q-k,k) \oplus \mathfrak{so}(2))$
	$((\Gamma\text{-}BC_s\text{-}A_1^s)_k; m, n)$, $1 \leq k \leq s-1$ $(m(\text{short} \in BC_{s-k}) \geq m(\text{short} \in BC_k))$	$(\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(q-s+2k) \oplus \mathfrak{u}(p+s-2k)), \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(k) \oplus \mathfrak{u}(q-s+k)) \oplus \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(s-k) \oplus \mathfrak{u}(p-k)) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{su}(p,q), \mathfrak{su}(k,s-k) \oplus \mathfrak{su}(p-k,q-s+k) \oplus \mathfrak{so}(2))$ $(\mathfrak{su}(r,s), \mathfrak{su}(q-s+k,s-k) \oplus \mathfrak{su}(p-k,k) \oplus \mathfrak{so}(2))$
$(\mathfrak{sp}(n), \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q), \mathfrak{sp}(r) \oplus \mathfrak{sp}(s))$ $(s < q \leq p < r)$	(I-BC_s-A_1^s; basic)	$(\mathfrak{sp}(p+s) \oplus \mathfrak{sp}(q-s), \mathfrak{sp}(s) \oplus \mathfrak{sp}(p) \oplus \mathfrak{sp}(q-s))$	$(\mathfrak{sp}(p,q), \mathfrak{sp}(0,s) \oplus \mathfrak{sp}(p,q-s))$ $(\mathfrak{sp}(r,s), \mathfrak{sp}(p,0) \oplus \mathfrak{sp}(q-s,s))$
	(I-BC_s-A_1^s; non-basic)	$(\mathfrak{sp}(q+s) \oplus \mathfrak{sp}(p-s), \mathfrak{sp}(s) \oplus \mathfrak{sp}(q) \oplus \mathfrak{sp}(p-s))$	$(\mathfrak{sp}(p,q), \mathfrak{sp}(0,s) \oplus \mathfrak{sp}(p-s,q))$ $(\mathfrak{sp}(r,s), \mathfrak{sp}(q,0) \oplus \mathfrak{sp}(p-s,s))$
	$((\Gamma\text{-}BC_s\text{-}A_1^s)_k; m, n)$, $1 \leq k \leq s-1$ $(m(\text{short} \in BC_k) \geq m(\text{short} \in BC_{s-k}))$	$(\mathfrak{sp}(p-s+2k) \oplus \mathfrak{sp}(q+s-2k), \mathfrak{sp}(k) \oplus \mathfrak{sp}(p-s+k) \oplus \mathfrak{sp}(s-k) \oplus \mathfrak{sp}(q-k))$	$(\mathfrak{sp}(p,q), \mathfrak{sp}(s-k,k) \oplus \mathfrak{sp}(p-s+k,q-k))$ $(\mathfrak{sp}(r,s), \mathfrak{sp}(p-s+k,s-k) \oplus \mathfrak{sp}(q-k,k))$
	$((\Gamma\text{-}BC_s\text{-}A_1^s)_k; m, n)$, $1 \leq k \leq s-1$ $(m(\text{short} \in BC_{s-k}) \geq m(\text{short} \in BC_k))$	$(\mathfrak{sp}(q-s+2k) \oplus \mathfrak{sp}(p+s-2k), \mathfrak{sp}(k) \oplus \mathfrak{sp}(q-s+k) \oplus \mathfrak{sp}(s-k) \oplus \mathfrak{sp}(p-k))$	$(\mathfrak{sp}(p,q), \mathfrak{sp}(k,s-k) \oplus \mathfrak{sp}(p-k,q-s+k))$ $(\mathfrak{sp}(r,s), \mathfrak{sp}(q-s+k,s-k) \oplus \mathfrak{sp}(p-k,k))$

表 2: (continued)

$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)$	$(\tilde{\Sigma},\Sigma,W;m,n)$	$(\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2},\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2})$	$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$ $(\mathfrak{g}_u,\theta_2,\theta_1)^*$	Remark
$(\mathfrak{su}(n),\mathfrak{so}(n),\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{su}(n-p)\oplus\mathfrak{so}(2))$	(I-$C_p;m,n$)	$(\mathfrak{sp}(p),\mathfrak{u}(p))$	$(\mathfrak{sl}(2p,\mathbb{R}),\mathfrak{sl}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(2))$ $(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{so}^*(2p))$	$n=2p$
	(I'-$C_p;m,n$)	$(\mathfrak{so}(2p),\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(p))$	$(\mathfrak{sl}(2p,\mathbb{R}),\mathfrak{sl}(p,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(p,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R})$ $(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{so}(p,p))$	
	(II-$BC_p;m,n$)	$(\mathfrak{so}(n),\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(n-p))$	$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{sl}(p,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(n-p,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R})$ $(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{so}(p,n-p))$	$n>2p$
$(\mathfrak{sp}(n),\mathfrak{u}(n),\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(n-p))$	(III-C_p; basic)	$(\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(p),\mathfrak{sp}(p))$	$(\mathfrak{sp}(2p,\mathbb{R}),\mathfrak{sp}(p,\mathbb{C}))$ $(\mathfrak{sp}(p,p),\mathfrak{su}^*(2p)\oplus\mathbb{R})$	$n=2p$
	(III-C_p; non-basic)	$(\mathfrak{su}(2p)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(p))\oplus\mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{sp}(2p,\mathbb{R}),\mathfrak{sp}(p,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sp}(p,\mathbb{R}))$ $(\mathfrak{sp}(p,p),\mathfrak{su}(p,p)\oplus\mathfrak{so}(2))$	
	(III-$BC_p;m,n$)	$(\mathfrak{su}(n)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(n-p))\oplus\mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{sp}(p,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sp}(n-p,\mathbb{R}))$ $(\mathfrak{sp}(p,n-p),\mathfrak{su}(p,n-p)\oplus\mathfrak{so}(2))$	$n>2p$
$(\mathfrak{so}(2n),\mathfrak{u}(n),\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(2n-p))$	(I-$C_{p/2};m,n$)	$(\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p/2)\oplus\mathfrak{u}(p/2))\oplus\mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{so}^*(2p),\mathfrak{so}^*(p)\oplus\mathfrak{so}^*(p))$ $(\mathfrak{so}(p,p),\mathfrak{su}(p/2,p/2)\oplus\mathfrak{so}(2))$	$n=p$, p: even
	(I'-$C_{p/2};m,n$)	$(\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(p),\mathfrak{so}(p))$	$(\mathfrak{so}^*(2p),\mathfrak{so}(p,\mathbb{C}))$ $(\mathfrak{so}(p,p),\mathfrak{sl}(p,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R})$	
	(I-$BC_{p/2}$-$B_{p/2};m,n$)	$(\mathfrak{su}(n)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p/2)\oplus\mathfrak{u}(n-p/2))\oplus\mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{so}^*(p)\oplus\mathfrak{so}^*(2n-p))$ $(\mathfrak{so}(p,2n-p),\mathfrak{su}(p/2,n-p/2)\oplus\mathfrak{so}(2))$	$n>2p$, p: even
	(II-$BC_{(p-1)/2};m,n$)	$(\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(p),\mathfrak{so}(p))$	$(\mathfrak{so}^*(2p),\mathfrak{so}(p,\mathbb{C}))$ $(\mathfrak{so}(p,p),\mathfrak{sl}(p,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R})$	$n=p$, p: odd
$(\mathfrak{su}(2n),\mathfrak{sp}(n),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(2n-p)))$	(III-$C_{p/2}$; basic)	$(\mathfrak{sp}(p),\mathfrak{sp}(p/2)\oplus\mathfrak{sp}(p/2))$	$(\mathfrak{su}^*(2p),\mathfrak{su}^*(p)\oplus\mathfrak{su}^*(p)\oplus\mathbb{R})$ $(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{sp}(p/2,p/2))$	$n=p$, p: even
	(III-$C_{p/2}$; non-basic)	$(\mathfrak{so}(2p),\mathfrak{u}(p))$	$(\mathfrak{su}^*(2p),\mathfrak{sl}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(2))$ $(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{sp}(p,\mathbb{R}))$	
	(I-$BC_{p/2}$-$B_{p/2};m,n$)	$(\mathfrak{sp}(n),\mathfrak{sp}(p/2)\oplus\mathfrak{sp}(n-p/2))$	$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{su}^*(p)\oplus\mathfrak{su}^*(2n-p))$ $(\mathfrak{su}(p,2n-p),\mathfrak{sp}(p/2,n-p/2))$	$n>2p$, p: even
	(III-$BC_{(p-1)/2};m,n$)	$(\mathfrak{so}(2p),\mathfrak{u}(p))$	$(\mathfrak{su}^*(2p),\mathfrak{sl}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(2))$ $(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{sp}(p,\mathbb{R}))$	$n=p$, p: odd
$(\mathfrak{su}(2n),\mathfrak{so}(2n),\mathfrak{sp}(n))$	(III-$A_{n-1};m,n$)	$(\mathfrak{su}(n)\oplus\mathfrak{su}(n)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{su}(n)\oplus\mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R}),\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}))$ $(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{so}^*(2n))$	
$(\mathfrak{so}(4n),\mathfrak{u}(2n),\mathfrak{u}(2n)')$	(I-BC_{n-1}-$A_1^{n-1};m,n$)	$(\mathfrak{so}(4n-2)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{u}(2n-1)\oplus\mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{su}(2n-1,1)\oplus\mathfrak{so}(2))$	self-dual
	((I'-BC_{n-1}-$A_1^{n-1})_s;m,n$), $1\leq s\leq n-1$	$(\mathfrak{so}(2(2s+1))\oplus\mathfrak{so}(2(2n-2s-1)),\mathfrak{u}(2s+1)\oplus\mathfrak{u}(2n-2s-1))$	$(\mathfrak{so}^*(4n),\mathfrak{su}(2s+1,n-2s-1)\oplus\mathfrak{so}(2))$	self-dual

表 2: (continued)

Case II: $(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2) \sim (\mathfrak{g}_u, \theta, \theta)$.

$(\mathfrak{g}_u, \theta)$	$(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$	$(\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2}, \mathfrak{g}_u^{\theta_1} \cap \mathfrak{g}_u^{\theta_2})$	$(\mathfrak{g}_u, \theta_1, \theta_2)^*$	Remark
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4))$	$(E_6, E_6, \emptyset)$	$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{sp}(4))$	$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sp}(4))$	
	(E_6, D_5, W)	$(\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{so}(5))$	$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sp}(2,2))$	
	$(E_6, A_1 \cup A_5, W)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(6), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(6))$	$(\mathfrak{e}_{6(6)}, \mathfrak{sp}(4, \mathbb{R}))$	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(F_4, F_4, \emptyset)$	$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{su}(6) \oplus \mathfrak{su}(2))$	
	$(F_4, A_1(\text{long}) \cup C_3, W)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(6), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(3) \oplus \mathfrak{u}(3)))$	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{su}(3,3) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$	self-associated
	(F_4, B_4, W)	$(\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(6) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(2)}, \mathfrak{su}(4,2) \oplus \mathfrak{su}(2))$	
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1))$	$(BC_2, BC_2, \emptyset)$	$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{u}(1))$	
	$(BC_2, C_1(\text{long}) \cup BC_1, W)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(6), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(5) \oplus \mathfrak{u}(1)))$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{so}^*(10) \oplus \mathfrak{so}(2))$	
	$(BC_2, C_2(\text{long}), W)$	$(\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{e}_{6(-14)}, \mathfrak{so}(8,2) \oplus \mathfrak{so}(2))$	self-associated
$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{f}_4)$	$(A_2, A_2, \emptyset)$	$(\mathfrak{e}_6, \mathfrak{f}_4)$	$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{f}_4)$	
	(A_2, A_1, W)	$(\mathfrak{so}(10) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{so}(9))$	$(\mathfrak{e}_{6(-26)}, \mathfrak{f}_{4(-20)})$	
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(8))$	$(E_7, E_7, \emptyset)$	$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(8))$	$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{su}(8))$	
	$(E_7, A_1 \cup D_6, W)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(12), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(6) \oplus \mathfrak{so}(6))$	$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{su}(4,4))$	
	(E_7, A_7, W)	$(\mathfrak{su}(8), \mathfrak{so}(8))$	$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{sl}(8, \mathbb{R}))$	self-associated
	(E_7, E_6, W)	$(\mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{sp}(4))$	$(\mathfrak{e}_{7(7)}, \mathfrak{su}^*(8))$	
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(F_4, F_4, \emptyset)$	$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2))$	
	$(F_4, A_1(\text{long}) \cup C_3, \emptyset)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(12), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{u}(6))$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{so}^*(12) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$	self-associated
	(F_4, B_4, W)	$(\mathfrak{so}(12) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{7(-5)}, \mathfrak{so}(8,4) \oplus \mathfrak{su}(2))$	self-associated
$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{u}(1))$	$(C_3, C_3, \emptyset)$	$(\mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2))$	
	$(C_3, C_1 \cup C_2, W)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{so}(12), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(10))$	$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{e}_{6(-14)} \oplus \mathfrak{so}(2))$	
	$(C_3, A_2(\text{short}), W)$	$(\mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{f}_4)$	$(\mathfrak{e}_{7(-25)}, \mathfrak{e}_{6(-26)} \oplus \mathbb{R})$	self-associated
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{so}(16))$	$(E_8, E_8, \emptyset)$	$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{so}(16))$	$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{so}(16))$	
	(E_8, D_8, W)	$(\mathfrak{so}(16), \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8))$	$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{so}(8,8))$	self-associated
	$(E_8, A_1 \cup A_7, W)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{e}_7, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(8))$	$(\mathfrak{e}_{8(8)}, \mathfrak{so}^*(16))$	
$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(F_4, F_4, \emptyset)$	$(\mathfrak{e}_8, \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{su}(2))$	
	$(F_4, A_1(\text{long}) \cup C_3, W)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{e}_7, \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{e}_{7(-25)} \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$	self-associated
	(F_4, B_4, W)	$(\mathfrak{so}(16), \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(12))$	$(\mathfrak{e}_{8(-24)}, \mathfrak{e}_{7(-5)} \oplus \mathfrak{su}(2))$	
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(3))$	$(F_4, F_4, \emptyset)$	$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(3))$	$(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(3))$	
	$(F_4, A_1(\text{long}) \cup C_3, W)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(3), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{u}(3))$	$(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{sp}(3, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$	self-associated
	(F_4, B_4, W)	$(\mathfrak{so}(9), \mathfrak{so}(4) \oplus \mathfrak{so}(5))$	$(\mathfrak{f}_{4(4)}, \mathfrak{sp}(2,1) \oplus \mathfrak{su}(2))$	
$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9))$	$(BC_1, BC_1, \emptyset)$	$(\mathfrak{f}_4, \mathfrak{so}(9))$	$(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{so}(9))$	
	$(BC_1, B_1(\text{long}), W)$	$(\mathfrak{so}(9), \mathfrak{so}(8))$	$(\mathfrak{f}_{4(-20)}, \mathfrak{so}(8,1))$	
$(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(G_2, G_2, \emptyset)$	$(\mathfrak{g}_2, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))$	$(\mathfrak{g}_{2(2)}, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2))$	
	$(G_2, A_1(\text{short}) \cup A_1(\text{long}), W)$	$(\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2), \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{g}_{2(2)}, \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$	self-associated

表 2: (continued)

$(\mathfrak{g}_u,\theta)$	$(\tilde{\Sigma},\Sigma,W)$	$(\mathfrak{g}_u^{\theta_1\theta_2},\mathfrak{g}_u^{\theta_1}\cap\mathfrak{g}_u^{\theta_2})$	$(\mathfrak{g}_u,\theta_1,\theta_2)^*$	Remark
$(\mathfrak{su}(n),\mathfrak{so}(n))$	$(A_{n-1},A_{n-1},\emptyset)$	$(\mathfrak{su}(n),\mathfrak{so}(n))$	$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{so}(n))$	
	$(A_{n-1},A_{i-1}\oplus A_{n-i-1},W)$	$(\mathfrak{su}(i)\oplus\mathfrak{su}(n-i)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{so}(i)\oplus\mathfrak{so}(n-i))$	$(\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{so}(i,n-i))$	$1\leq i\leq n-1$
$(\mathfrak{su}(2n),\mathfrak{sp}(n))$	$(A_{n-1},A_{n-1},\emptyset)$	$(\mathfrak{su}(2n),\mathfrak{sp}(n))$	$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{sp}(n))$	
	$(A_{n-1},A_{i-1}\oplus A_{n-i-1},W)$	$(\mathfrak{su}(2i)\oplus\mathfrak{su}(2(n-i))\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{sp}(i)\oplus\mathfrak{sp}(n-i))$	$(\mathfrak{su}^*(2n),\mathfrak{sp}(i,n-i))$	$1\leq i\leq n-1$
$(\mathfrak{su}(n),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(q)))$	$(C_p,C_p,\emptyset)$	$(\mathfrak{su}(2p),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(p)))$	$(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(p)))$	$n=2p$
	$(C_p,C_{p-i}\oplus C_i,W)$	$(\mathfrak{su}(2(p-i))\oplus\mathfrak{su}(2i)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p-i)\oplus\mathfrak{u}(p-i))\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(i)\oplus\mathfrak{u}(i))\oplus\mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p-i,i)\oplus\mathfrak{u}(i,p-i)))$	
	$(C_p,A_{p-1}(\text{short}),W)$	$(\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{su}(p))$	$(\mathfrak{su}(p,p),\mathfrak{sl}(p,\mathbb{C})\oplus\mathbb{R})$	$\begin{cases}n=2p\\ \text{self-associated}\end{cases}$
	$(BC_p,BC_p,\emptyset)$	$(\mathfrak{su}(n),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(n-p)))$	$(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p)\oplus\mathfrak{u}(n-p)))$	$n>2p$
	$(BC_p,BC_{p-i}\oplus C_i(\text{middle, long}),W)$	$(\mathfrak{su}(n-2i)\oplus\mathfrak{su}(2i)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(p-i)\oplus\mathfrak{u}(n-p-i))\oplus\mathfrak{s}(\mathfrak{u}(i)\oplus\mathfrak{u}(i))\oplus\mathfrak{so}(2))$	$(\mathfrak{su}(p,n-p),\mathfrak{su}(p-i,i)\oplus\mathfrak{su}(i,n-p-i)\oplus\mathfrak{so}(2))$	
$(\mathfrak{so}(n),\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(n-p))$	$(D_p,D_p,\emptyset;m,n)$	$(\mathfrak{so}(2p),\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(p))$	$(\mathfrak{so}(p,p),\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(p))$	$n=2p$
	$(D_p,D_{p-i}\oplus D_i,W)$	$(\mathfrak{so}(2(p-i))\oplus\mathfrak{so}(2i),\mathfrak{so}(p-i)\oplus\mathfrak{so}(p-i)\oplus\mathfrak{so}(i)\oplus\mathfrak{so}(i))$	$(\mathfrak{so}(p,p),\mathfrak{so}(p-i,i)\oplus\mathfrak{so}(i,p-i))$	
	(D_p,A_{p-1},W)	$(\mathfrak{su}(p)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{so}(p))$	$(\mathfrak{so}(p,p),\mathfrak{so}(p,\mathbb{C}))$	
	(D_p,D_{p-1},W)	$(\mathfrak{so}(2(p-1))\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{so}(p-1)\oplus\mathfrak{so}(p-1))$	$(\mathfrak{so}(p,p),\mathfrak{so}(p-1,1)\oplus\mathfrak{so}(1,p-1))$	
	$(B_p,B_p,\emptyset;m,n)$	$(\mathfrak{so}(n),\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(n-p))$	$(\mathfrak{so}(p,n-p),\mathfrak{so}(p)\oplus\mathfrak{so}(n-p))$	$n>2p$
	$(B_p,B_{p-i}\oplus D_i(\text{long}),W)$	$(\mathfrak{so}(n-2i)\oplus\mathfrak{so}(2i),\mathfrak{so}(p-i)\oplus\mathfrak{so}(n-p-i)\oplus\mathfrak{so}(i)\oplus\mathfrak{so}(i))$	$(\mathfrak{so}(p,n-p),\mathfrak{so}(p-i,i)\oplus\mathfrak{so}(i,n-p-i))$	
	(B_p,B_{p-1},W)	$(\mathfrak{so}(n-2)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{so}(p-1)\oplus\mathfrak{so}(n-p-1))$	$(\mathfrak{so}(p,n-p),\mathfrak{so}(p-1,1)\oplus\mathfrak{so}(1,n-p-1))$	
$(\mathfrak{so}(2n),\mathfrak{u}(n))$	$(C_{n/2},C_{n/2},\emptyset)$	$(\mathfrak{so}(2n),\mathfrak{u}(n))$	$(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{u}(n))$	n: even
	$(C_{n/2},C_{n/2-i}\oplus C_i,W)$	$(\mathfrak{so}(2n-4i)\oplus\mathfrak{so}(4i),\mathfrak{u}(n-2i)\oplus\mathfrak{u}(2i))$	$(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{su}(n-2i,2i)\oplus\mathfrak{so}(2))$	
	$(C_{n/2},A_{n/2-1}(\text{short}),W)$	$(\mathfrak{su}(n)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{sp}(n/2))$	$(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{su}^*(n)\oplus\mathbb{R})$	$\begin{cases}n\text{: even}\\ \text{self-associated}\end{cases}$
	$(BC_{(n-1)/2},BC_{(n-1)/2},\emptyset;m,n)$	$(\mathfrak{so}(2n),\mathfrak{u}(n))$	$(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{u}(n))$	n: odd
	$(BC_{(n-1)/2},BC_{(n-1)/2-i}\oplus C_i(\text{middle, long}),W)$	$(\mathfrak{so}(2n-4i)\oplus\mathfrak{so}(4i),\mathfrak{u}(n-2i)\oplus\mathfrak{u}(2i))$	$(\mathfrak{so}^*(2n),\mathfrak{su}(n-2i,2i)\oplus\mathfrak{so}(2))$	
$(\mathfrak{sp}(n),\mathfrak{u}(n))$	$(C_n,C_n,\emptyset;m,n)$	$(\mathfrak{sp}(n),\mathfrak{u}(n))$	$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{u}(n))$	
	$(C_n,C_{n-i}\oplus C_i,W)$	$(\mathfrak{sp}(n-i)\oplus\mathfrak{sp}(i),\mathfrak{u}(n-i)\oplus\mathfrak{u}(i))$	$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{su}(n-i,i)\oplus\mathfrak{so}(2))$	
	$(C_n,A_{n-1}(\text{short}),W)$	$(\mathfrak{su}(n)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{so}(n))$	$(\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}),\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R})$	self-associated
$(\mathfrak{sp}(n),\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(n-p))$	$(C_p,C_p,\emptyset)$	$(\mathfrak{sp}(2p),\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(p))$	$(\mathfrak{sp}(p,p),\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(p))$	$n=2p$
	$(C_p,C_{p-i}\cup C_i,W)$	$(\mathfrak{sp}(2(p-i))\oplus\mathfrak{sp}(2i),\mathfrak{sp}(p-i)\oplus\mathfrak{sp}(p-i)\oplus\mathfrak{sp}(i)\oplus\mathfrak{sp}(i))$	$(\mathfrak{sp}(p,p),\mathfrak{sp}(p-i,i)\oplus\mathfrak{sp}(i,p-i))$	
	$(C_p,A_{p-1}(\text{short}),W)$	$(\mathfrak{su}(2p)\oplus\mathfrak{so}(2),\mathfrak{sp}(p))$	$(\mathfrak{sp}(p,p),\mathfrak{sp}(p,\mathbb{C}))$	
	$(BC_p,BC_p,\emptyset)$	$(\mathfrak{sp}(n),\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(n-p))$	$(\mathfrak{sp}(p,n-p),\mathfrak{sp}(p)\oplus\mathfrak{sp}(n-p))$	$n>2p$
	$(BC_p,BC_{p-i}\cup C_i(\text{middle, long}),W)$	$(\mathfrak{sp}(n-2i)\oplus\mathfrak{sp}(2i),\mathfrak{sp}(p-i)\oplus\mathfrak{sp}(n-p-i)\oplus\mathfrak{sp}(i)\oplus\mathfrak{sp}(i))$	$(\mathfrak{sp}(p,n-p),\mathfrak{sp}(p-i,i)\oplus\mathfrak{sp}(i,n-p-i))$	