3 次元ローレンツ多様体内の有界なガウス曲率を持つ混合型曲面

本田　淳史 *†

横浜国立大学

概要

3 次元ローレンツ多様体内の連結な正則曲面で，空間的点集合と時間的点集合がどちらも空でないものを**混合型曲面** (*mixed type surface*) と呼ぶ．混合型曲面の光的点は，誘導計量の特異点とみなされる．本稿では，混合型曲面の非退化な光的点におけるガウス曲率の振る舞いを紹介する．とくに，ガウス曲率の有界性の特徴付けを与えるために，ある非退化な光的点のクラス (第 1 種光的点) に沿った**光的特異曲率**などの基本的な不変量を導入する．さらに，有界なガウス曲率を持つ混合型曲面に対するガウス・ボンネ型の定理を紹介する．本稿の内容は神戸大学の佐治健太郎氏，寺本圭佑氏との共同研究 [HST] にもとづく．

1　混合型曲面の光的点

(M^3, h) を向きづけられた 3 次元ローレンツ多様体とする ($h = \langle\ ,\ \rangle$ はローレンツ計量)．点 $p \in M^3$ において，接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_pM^3$ が $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle > 0$ もしくは $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ を満たすとき，**空間的**であるという．同様に，$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle < 0$ (resp. $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$) が成り立つとき，$\boldsymbol{v} \in T_pM^3$ を**時間的** (resp. **光的**) と呼ぶ．

3 次元ローレンツ多様体 $M^3 = (M^3, h)$ の**曲面**とは，連結な 2 次元 C^∞ 級多様体 Σ のはめ込み $f : \Sigma \to (M^3, h)$ を表すこととする．このとき，

$$(ds^2)_p(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) := \langle df_p(\boldsymbol{v}), df_p(\boldsymbol{w})\rangle \qquad (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in T_p\Sigma,\ p \in \Sigma)$$

により定まる Σ のなめらかな計量 ds^2 を**第 1 基本形式** (もしくは**誘導計量**) と呼ぶ．

点 $p \in \Sigma$ が**空間的点**であるとは，$(ds^2)_p$ が $T_p\Sigma$ の正定値対称双線形形式を定めるときをいう．同様に，$(ds^2)_p$ が不定値 (resp. 退化) のとき，$p \in \Sigma$ を**時間的点** (resp. **光的点**) と呼ぶ．空間的点集合 (resp. 時間的点集合，光的点集合) を Σ_+ (resp. Σ_-, LD) で表す．$\Sigma = \Sigma_+$ (resp. $\Sigma = \Sigma_-$) となるとき，曲面 $f : \Sigma \to M^3$ は空間的 (resp. 時間的) と呼ばれる．

定義 1.1. 連結な 2 次元 C^∞ 級多様体 Σ に対し，空間的点集合 Σ_+ と時間的点集合 Σ_- がどちら

* honda-atsufumi-kp@ynu.jp

† 本研究は JSPS 科研費 16K17605 の助成を受けたものである．

も空でない曲面 $f:\Sigma\to(M^3,h)$ を**混合型曲面**と呼ぶ.

1.1 第 1 種光的点

$f:\Sigma\to(M^3,h)$ を混合型曲面とする．Σ の座標近傍 $(U;u,v)$ において，第 1 基本形式 ds^2 は

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

と表される．ただし，$E:=\langle f_u,f_u\rangle$, $F:=\langle f_u,f_v\rangle$, $G:=\langle f_v,f_v\rangle$ とする．関数 λ を

$$\lambda:=EG-F^2$$

とおくとき，点 $p\in U$ が光的点 (resp. 空間的点, 時間的点) であることと，$\lambda(p)=0$ (resp. $\lambda(p)>0$, $\lambda(p)<0$) は同値である．$d\lambda(p)\neq 0$ である光的点 $p\in LD$ を**非退化**と呼ぶ．このとき，

- 陰関数定理より，ある正数 $\varepsilon>0$ と Σ の正則曲線 $\gamma(t)$ $(|t|<\varepsilon)$ で $\gamma(0)=p$ かつ LD は p の近傍で $\gamma(t)$ によりパラメトライズされるようなものが存在する．$\gamma(t)$ を**特性曲線** (characteristic curve) と呼ぶ.
- 一方，$\gamma(t)$ に沿うベクトル場 $\eta(t)$ で $L(t):=df(\eta(t))$ は M^3 の光的ベクトル場を与えるものが存在する．$\eta(t)$ を **null ベクトル場**と呼ぶ.

定義 1.2. 非退化な光的点 $p\in LD$ に対して，$\gamma(t)$ $(|t|<\varepsilon)$ を $p=\gamma(0)$ を通る特性曲線，$\eta(t)$ を $\gamma(t)$ に沿う null ベクトル場とする.

- $\gamma'(0)$ と $\eta(0)$ が 1 次独立であるとき，p を**第 1 種光的点**[*1]と呼ぶ．そうでないとき，p を**第 2 種**と呼ぶ.
- 第 2 種光的点 p の任意の近傍 U に対して $LD\cap U\setminus\{p\}$ が第 1 種光的点を含むとき，p を**許容的**な第 2 種光的点という.
- 許容的でない第 2 種光的点 p を **L_∞-点**と呼ぶ．つまり，p が L_∞-点であるとは，ある正数 $\bar\varepsilon>0$ で，任意の $t\in(-\bar\varepsilon,\bar\varepsilon)$ に対して $\gamma'(t)$ と $\eta(t)$ が 1 次従属となるものが存在するときをいう.

特性曲線 $\gamma(t)$ の f による像を $\hat\gamma(t):=(f\circ\gamma)(t)$ とおくと，M^3 の正則曲線である．このとき，p が第 1 種 (resp. 第 2 種) であることと $\hat\gamma'(0)\in T_{f(p)}M$ が空間的 (resp. 光的) であることが同値である．p が第 1 種光的点であるとき，ある正数 $\bar\varepsilon>0$ が存在して，任意の $t\in(-\bar\varepsilon,\bar\varepsilon)$ に対して $\gamma(t)$ も第 1 種光的点となる．つまり，$\hat\gamma(t)$ $(|t|<\bar\varepsilon)$ は M^3 の空間的な正則曲線である．一方，p が L_∞-点であるならば，$\hat\gamma(t)$ は M^3 の光的な正則曲線を与える.

事実 1.3 ([HKKUY, Proposition 3.5], [UY2])**.** $f:\Sigma\to M^3$ を混合型曲面，$p\in\Sigma$ を非退化な光的点とする．もし，平均曲率 H が p の近傍で有界ならば，p は L_∞-点である.

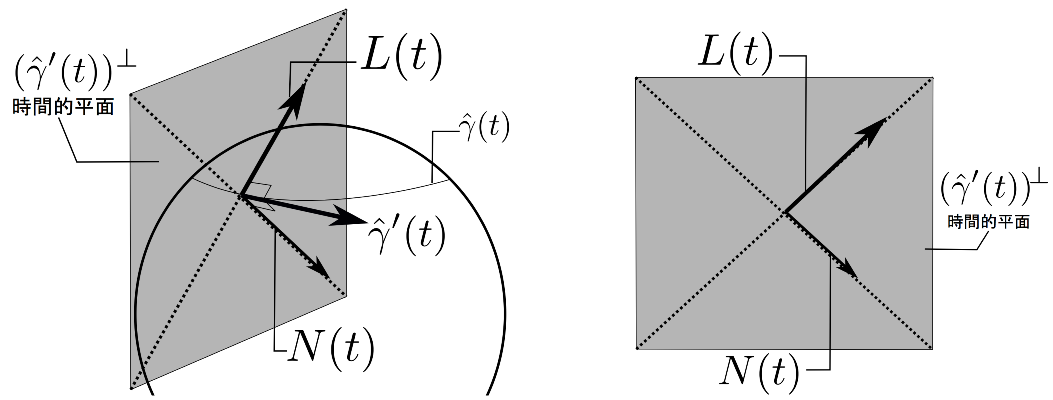
---

*1 第 1 種光的点はカスプ辺をモデルとしている．例えば [MSUY] を参照.

1.2　第 1 種光的点の不変量

$p \in LD$ を第 1 種光的点，$\gamma(t)$ $(|t| < \varepsilon)$ を $p = \gamma(0)$ を通る特性曲線とする．必要ならば $\varepsilon > 0$ を十分小さくとることで，一般性を失わずに，任意の $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ に対して $\gamma(t)$ は第 1 種光的点であると仮定してよい．このとき，$\gamma(t)$ の f による像 $\hat{\gamma}(t) := (f \circ \gamma)(t)$ $(|t| < \varepsilon)$ は M^3 の空間的曲線なので，t を弧長パラメータに取り直すことができる．

- 各 t において $\hat{\gamma}'(t)\,(\in T_{\hat{\gamma}(t)}M^3)$ は空間的ベクトルなので，$\hat{\gamma}'(t)$ の直交補空間 $(\hat{\gamma}'(t))^{\perp}$ は $T_{\hat{\gamma}(t)}M^3$ の時間的な 2 次元部分空間である．
- $L(t) = df(\eta(t))$ は $\hat{\gamma}'(t)$ に直交する M^3 の光的ベクトルなので，$L(t) \in (\hat{\gamma}'(t))^{\perp}$ である．
- このとき，$\hat{\gamma}(t)$ に沿う M^3 の光的ベクトル場 $N(t)$ で，$N(t) \in (\hat{\gamma}'(t))^{\perp}$ かつ $\langle N(t), L(t) \rangle = 1$ を満たすものが存在する．



定義 1.4 ([HST])．(M^3, h) の Levi-Civita 接続を ∇ で表す．第 1 種光的点 $p \in LD$ に対して，

$$\kappa_L(p) := \frac{1}{\left(\eta_p \left\langle df(\eta), df(\eta) \right\rangle\right)^{\frac{1}{3}}} \left\langle \nabla_{d/dt} \hat{\gamma}'(0), L(0) \right\rangle, \tag{1.1}$$

$$\kappa_N(p) := \left(\eta_p \left\langle df(\eta), df(\eta) \right\rangle\right)^{\frac{1}{3}} \left\langle \nabla_{d/dt} \hat{\gamma}'(0), N(0) \right\rangle \tag{1.2}$$

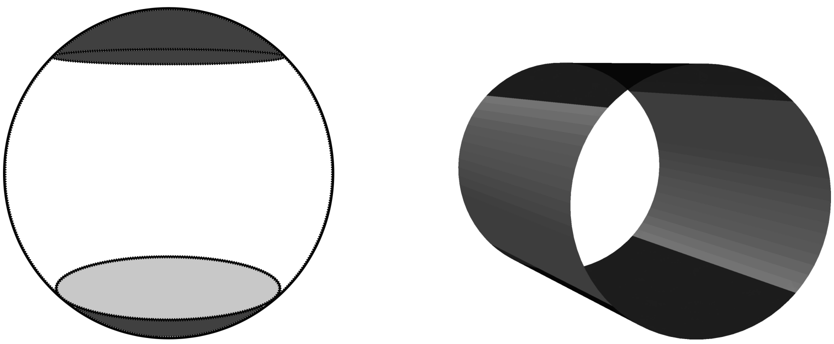
とおく．$\kappa_L(p)$ を**光的特異曲率**，$\kappa_N(p)$ を**光的法曲率**と呼ぶ．

光的特異曲率 κ_L と光的法曲率 κ_N は，[SUY] で導入されたカスプ辺に対する幾何学的不変量の特異曲率 κ_s，極限法曲率 κ_ν にそれぞれ対応している．特に，κ_L は κ_s に類似の性質を持つことを示すことができる．例えば，κ_s は第 1 基本形式のみで表すことができる内的不変量であるが ([SUY, Proposition 1.18] を参照)，κ_L も内的不変量である．また，[SUY, Corollary 1.14] で示されたように，κ_s はツバメの尾において $-\infty$ に発散するが，同様のことが成り立つ．

定理 A ([HST])．許容的な第 2 種光的点において，光的特異曲率 κ_L は $-\infty$ に発散する．

2　ガウス曲率の挙動

下図のように，球面や円柱面はミンコフスキー空間 $\boldsymbol{R}^3_1$ の曲面としてみると混合型曲面である．いずれもすべての光的点は第 1 種であるが，球面のガウス曲率 K はその光的点において非有界である一方で，円柱面は平坦 $K=0$ であり，とくに K は有界である．



球面　　　　円柱面

図 1　ミンコフスキー空間 $\boldsymbol{R}^3_1$ の球面と円柱面．いずれも混合型曲面であり，濃色部分は空間的点集合の像を表す．

$f:\Sigma\to M^3$ を混合型曲面，$p\in LD$ を第 1 種光的点とする．このとき，p の座標近傍 $(U;u,v)$ で，

- u-軸が光的点集合であり，
- $(\eta :=)\ \partial_v$ が null ベクトル場であるようなものが存在する．

このような座標系 (u,v) を適合的 (adapted) と呼ぶ．適合的な座標系において，$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ と表すとき，

$$\kappa_B(p) := \left.\frac{-1}{2E^2(G_v)^{\frac{5}{3}}}\left(G_v\left(E\left(E_{vv}-2F_{uv}\right)+E_uF_v\right)-\frac{1}{5}E_v\left(EG_{vv}-2(F_v)^2\right)\right)\right|_{(u,v)=(0,0)}$$

は適合的な座標系 (u,v) のとり方によらない．このとき，以下が成り立つ．

定理 B ([HST])**．** $f:\Sigma\to M^3$ を混合型曲面，$p\in LD$ を第 1 種光的点とする．このとき，ガウス曲率 K が p の近傍 U で有界であるための必要十分条件は，U 内の特性曲線に沿って

$$\kappa_L = 0 \quad かつ \quad \kappa_N = \kappa_B \tag{2.1}$$

が成り立つことである．

定理 A と定理 B の系として，次が成り立つ．

系 C ([HST])．$f : \Sigma \to M^3$ を混合型曲面，$p \in \Sigma$ を非退化な光的点とする．もし，ガウス曲率 K が p の近傍で有界ならば，p は第 1 種光的点である．

また，Pelletier [Pelletier], Steller [Steller] の結果に定理 B と系 C を適用することで以下を得る．

系 D ([HST])．Σ を連結な向きづけられた 2 次元閉多様体，$f : \Sigma \to M^3$ を混合型曲面とする．もし，f の全ての光的点が非退化であり，f が有界なガウス曲率を持つならば，

$$\int_\Sigma K\, dA = 2\pi\, \chi(\Sigma)$$

が成り立つ．ここで，$\chi(\Sigma)$ は Σ オイラー標数を表す．

参考文献

[HST] A. Honda, K. Saji and K. Teramoto, *Mixed type surfaces with bounded Gaussian curvature in three-dimensional Lorentzian manifolds*, preprint.

[HKKUY] A. Honda, M. Koiso, M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Mixed type surfaces with bounded mean curvature in* 3*-dimensional space-times*, Differential Geometry and its Applications **52** (2017) 64–77.

[KRSUY] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.

[Kossowski] M. Kossowski, *Pseudo-Riemannian metrics singularities and the extendability of parallel transport*, Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 147–154.

[MSUY] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifold, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.

[Pelletier] F. Pelletier, *Pseudo métriques génériques et théorème de Gauss-Bonnet en dimension* 2, Singularities and dynamical systems (Iráklion, 1983), 219–238, North-Holland Math. Stud., 103, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[SUY] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.

[Steller] M. Steller, *A Gauss-Bonnet formula for metrics with varying signature*, Z. Anal. Anwend. **25** (2006), no. 2, 143–162.

[Tari1] F. Tari, *Caustics of surfaces in the Minkowski 3-space*, Q. J. Math. **63** (2012), 189–209.

[Tari2] F. Tari, *Umbilics of surfaces in the Minkowski 3-space*, J. Math. Soc. Japan **65** (2013), 723–731.

[UY1] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces with light-like points in Lorentz-Minkowski 3-space with applications*, In: Cañadas-Pinedo M., Flores J., Palomo F. (eds) Lorentzian Geometry and Related Topics. GELOMA 2016. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, pp 253–273 (2017), vol 211. Springer, Cham.

[UY2] M. Umehara and K. Yamada, *Hypersurfaces with light-like points*, Preprint, 2018, arXiv:1806.09233.