複素双曲空間内のハミルトン安定ラグランジュトーラスについて

梶ヶ谷徹　(東京電機大工)*

1. 序

実2次元の空間形$M(c)=S^2(c>0),\mathbb{R}(c=0),\mathbb{H}^2(c<0)$内の単純閉曲線$\gamma$に対し，$\gamma$の長さを$l(\gamma)$，$\gamma$が囲む面積を$A(\gamma)$と書けば，**等周不等式**

$$l(\gamma)^2 \geq 4\pi A(\gamma) - cA(\gamma)^2$$

が成り立つ(cf. [14])．さらに，等号成立は$M(c)$内の測地円γ_0の場合に限ることが知られている．特にこの不等式から，測地円γ_0は，$A(\gamma)=A(\gamma_0)$を満たす全ての単純閉曲線γの中で最小の長さを持つことが分かる．この素朴だが興味深い事実のシンプレクティック幾何学的な一般化として，Y.-G.Ohおよび小野肇は，$\mathbb{C}^n$上の標準的なトーラス作用$T^n \curvearrowright \mathbb{C}^n$によるラグランジュトーラス軌道およびその商として得られる$\mathbb{C}P^n$内のトーラス軌道はすべて，**ハミルトン体積最小**，すなわち各ハミルトンイソトピー類内で体積最小であろうと予想した([12], [13])．事実，これらはすべて**ハミルトン安定**，すなわちハミルトン変形のもとで体積汎関数の極小値を取ることが示されていたのだが，この予想が次元が3以上のほとんど全てのトーラス軌道について正しくないことは，Chekanovによるラグランジュトーラスのハミルトンイソトピーに関する重要な結果[2]を用いて，Viterbo[15]および入江博-小野[5]によって指摘されている(詳しくは3章を参照)．しかしながら，いくつかのトーラス軌道，特にCliffordトーラスについてこの予想は未だopen problemである．

一方で以上の単純閉曲線に関する観察が双曲平面$\mathbb{H}^2$内の測地円に対しても妥当であることは等周不等式の示す通りであるが，これまでのところこの双曲計量に関する一般化についてはあまり(全く?)結果がなかった．経験的に言えば，(古典的な意味での)極小ラグランジュ部分多様体の安定性は外側の空間Mの曲率に依存する．例えば，MのRicci曲率が負の場合，極小ラグランジュ部分多様体は常に(strictに)安定であることが知られており，これはMのRicci曲率が正の場合，例えば$M=\mathbb{C}P^n$における安定極小ラグランジュ部分多様体の非存在に比べ対照的である．この経験的事実をハミルトン安定性に対して類推することは安直な考えなのだが，この弱い意味での安定性の概念に対し，外側の空間の曲率による，性質あるいは技術的利点の違い(があるのかないのか)を知ることには意味があるだろう．

双曲計量に関する一般化として自然な一つの設定は，複素双曲空間$\mathbb{C}H^n \simeq G/K = SU(1,n)/S(U(1)\times U(n))$内のコンパクトラグランジュ部分多様体(特にトーラス)を考えること[1]であるが，ここで，$\mathbb{C}H^n$のシンプレクティック幾何が$\mathbb{C}^n$のそれと全く同じであるという事実はもう一つの着目すべき点である．すなわち，$\mathbb{C}H^n$と$\mathbb{C}^n$の間には，シンプレクティック微分同相写像Φが存在し，Φを通して$\mathbb{C}^n$内のラグランジュ部分多様体は$\mathbb{C}H^n$内のそれと思うことができる(逆もまたそうである)．さらに興味深いことに，

---

* e-mail: kajigaya@mail.dendai.ac.jp, 部分多様体幾何とリー群作用2018(於東京理科大学)講演録，日付: 2018年9月30日.

[1] $\mathbb{C}H^n$内のコンパクト部分多様体は古典的な意味では極小になり得ないことに注意する．

この写像 Φ は K-同変に取ることができて, K は $\mathbb{C}H^n \simeq G/K$ の極大コンパクト連結部分群であるから, (等長変換による違いを除き)$\mathbb{C}H^n$ 内の任意のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体は $\mathbb{C}^n$ 内のそれと対応を持つ. 実際はこのコンパクト等質ラグランジュ部分多様体の対応は1:1であるのだが, これらは全て ($\mathbb{C}H^n$ でも $\mathbb{C}^n$ においても) **ハミルトン極小**, すなわちハミルトン変形のもとでの体積汎関数の臨界点を取っていることが分かる. この意味で $\mathbb{C}H^n$ においても調べるべき例は豊富にある.

論文[8]では以上の動機のもと, $\mathbb{C}H^n$ 内のトーラス軌道に対してハミルトン安定性を調べ, 幾つかの結果を得たので, この場を借りて報告させて頂きたい.

1.1. ハミルトン体積最小性とハミルトン安定ラグランジュ部分多様体

この節ではハミルトン体積最小性やハミルトン安定性の概念とその判定法などについて簡単に復習する. 動機や具体例, 他の文脈への関連など詳しくは, Oh による論文[11], [12]やその一般化について解説した[9]とその中のリファレンスを参照して頂きたい.

(M,ω) を実 $2n$ 次元シンプレクティック多様体とする. ここで, ω はシンプレクティック形式である. 実 n 次元多様体 L の埋め込み $\phi : L \to M$ がラグランジュであるとは, $\phi^*\omega = 0$ となることを言う. 今, 適当なリーマン計量 g が M 上に与えられたとし, この計量に関するラグランジュ部分多様体の体積最小性問題 (または体積変分問題) を考えよう. 一般にある計量に関する体積最小性は非常に強い性質であるため, 我々は少し弱く, しかしシンプレクティック幾何的対象であるラグランジュ部分多様体にとって自然な設定で体積最小性問題を考えることにする. 以下, 埋め込む多様体 L はコンパクトであると仮定する.

(M,ω) 上の微分同相 Φ がハミルトン微分同相であるとは, 時間依存するコンパクトサポートを持つハミルトン関数 $h_t \in C_c^\infty([0,1]\times M)$ によるハミルトンベクトル場 X_{h_t} の生成する初期値 $\Phi_0 = Id_M$ のフロー $\{\Phi_t\}_{0\le t\le 1}$ に関して, $\Phi_1 = \Phi$ となるものとする. (M,ω) のラグランジュ部分多様体 L が計量 g に関して**ハミルトン体積最小**であるとは, (M,ω) 上の任意のハミルトン微分同相 Φ に対して, $\mathrm{Vol}_g(L) \le \mathrm{Vol}_g(\Phi(L))$ の成り立つことと定義する. ここで, Vol_g は g によって決まる体積要素に関する体積である. (強い意味での) 体積最小性は持たないが, ハミルトン体積最小性を持つ部分多様体の例は少数ながら知られており, 例えば, 全測地的な $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ (Oh-Kleiner), $S^1\times S^1 \subset S^2\times S^2$ (入江-小野-酒井), $S^{2n-1} \subset Q_{2n-1}$ (入江-酒井-田崎) などがある (より詳しくは, 例えば[5]とその中のリファレンスを参照).

本稿における最終的な目標は「与えられたラグランジュ部分多様体がハミルトン体積最小であるか」という問いに答えることであるが, それを調べるためにまず無限小レベルでの体積汎関数の変分を考えておこう. すなわち, 我々は次の体積変分問題を考える: $\phi = \phi_0$ の無限小変形 $\phi_t : (-\epsilon,\epsilon)\times L \to M$ が**ハミルトン変形**であるとは, L 上の関数の族 $u_t \in C^\infty(L)$ が存在して, 変分ベクトル場 $V_t = d\phi/dt$ が $V_t = J\nabla u_t$ を満たすことを言う. 埋め込み ϕ が計量 g に関して**ハミルトン極小**であるとは, ϕ の任意のハミルトン変形に対し $d/dt|_{t=0}\mathrm{Vol}_g(\phi_t(L)) = 0$ となることと定義する. また, ハミルトン極小な ϕ が**ハミルトン安定**であるとは, 任意のハミルトン変形に対し $d^2/dt^2|_{t=0}\mathrm{Vol}_g(\phi_t(L)) \ge 0$ を満たすこととする. さらに, 第二変分において等号を成立させる変分ベクトル場のなすベクトル空間が, g に関するキリング場 (の制限) によって張られるとき, L は **rigid** であると言う. ハミルトン安定性や極小性はハミルトン体積最小性を持つための必要条件であるが, これらの性質は, 原理的には, 体積変分を実際に計算してみることにより

判定することができる.

例えば, (M,ω,J) が (概) ケーラー構造であり, g が両立する (概) ケーラー計量の場合には, ハミルトン極小性に対する Euler-Lagrange 方程式は, $\phi: L\to M$ の平均曲率ベクトル H を用いて $\mathrm{div}_M JH=0$ とかける. 例えば, 任意のケーラー多様体 M 内のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体, すなわち, M の正則等長変換群のある連結コンパクトリー部分群の軌道として実現されるラグランジュ部分多様体は必ずハミルトン極小になる. 一方, ハミルトン極小ラグランジュ部分多様体に対する第二変分は, M がケーラー多様体であるという仮定のもと,

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0}\mathrm{Vol}_g(\phi_t(L))=\int_L|\Delta u|^2-\rho(\nabla u,J\nabla u)-2g(B(\nabla u,\nabla u),H)+JH(u)^2dv_g \quad (1)$$

と計算される (cf. [9], [12]). ここで, ρ はケーラー多様体 (M,ω,J) の Ricci 形式, B と H はそれぞれ $\phi: L\to M$ の第二基本形式と平均曲率ベクトルである. また $u\in C^\infty(L)$ は $V_0=J\nabla u$ となる関数である. 特に, M がケーラー・アインシュタイン (i.e. ある定数 C に関して $\rho=C\omega$) かつ L が極小 (i.e. $H=0$) の場合は, ハミルトン安定性は $C^\infty(L)$ に作用するラプラシアン Δ の第一固有値 λ_1 の満たす不等式 $\lambda_1(\Delta)\geq C$ と同値になる. ラプラシアンの固有値による判定法は大変便利であるが, 本稿で扱いたい対象は基本的に非極小の場合であることに注意しておく.

1.2. $\mathbb{C}^n$ 内のハミルトン安定ラグランジュ部分多様体

ここでは, $\mathbb{C}^n$ 内のハミルトン安定コンパクトラグランジュ部分多様体の例について述べる. $\mathbb{C}^n$ 内にはコンパクトかつ極小な部分多様体は存在しないが, ハミルトン極小の意味では興味深い例が存在する.

例 1 (トーラス軌道)**.** 実 n-次元トーラス T^n の標準的なトーラス作用 $T^n\curvearrowright\mathbb{C}^n$, $T^n\cdot z=(e^{\sqrt{-1}\theta_1}z_1,\dots,e^{\sqrt{-1}\theta_n}z_n)$ を考える. この作用による主軌道は, 直積トーラス $T(r_1,\dots,r_n)=S^1(r_1)\times\cdots\times S^n(r_n)$ に他ならず, 全てラグランジュかつハミルトン極小である. さらに, これらは全てハミルトン安定かつ rigid になる (Y-G.Oh [12]).

例 2 (平行ラグランジュ部分多様体)**.** ケーラー多様体内のラグランジュ部分多様体 L はその第二基本形式が平行 (i.e. $\nabla^\perp B=0$) となるとき, **平行ラグランジュ部分多様体**と呼ばれる. 複素空間形内の平行ラグランジュ部分多様体は内藤-竹内によって分類されており, 例えば $\mathbb{C}^n$ の場合は, $U(n)$-型の既約対称 R-空間の標準埋め込みとそれらの直積によって得られる (cf. [1]). Amarzaya-大仁田 [1] によれば $\mathbb{C}^n$(および $\mathbb{C}P^n$) 内の任意の平行ラグランジュ部分多様体はハミルトン安定かつ rigid である.

これらの例は応用上も重要で, 例えば次の結果が知られている:

定理 3 (Joyce-Lee-Schoen [6])**.** *(M,ω) を任意のコンパクトシンプレクティック多様体, g を ω に両立する計量とする. また, $\mathbb{C}^n$ 内の rigid なハミルトン極小コンパクトラグランジュ部分多様体 L を一つ取る. このとき, (M,ω,g) 内に L と微分同相なハミルトン極小ラグランジュ部分多様体 L' が存在する. さらに, L が $\mathbb{C}^n$ 内でハミルトン安定であるなら, L' も M 内でハミルトン安定になるように取ることができる.*

もちろんこれは存在定理であって, 具体的な構成法を与えているわけではない.

2. $\mathbb{C}P^n$ および $\mathbb{C}H^n$ 内のトーラス軌道のハミルトン安定性

この節では, 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ および複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n$ 内の特にトーラス軌道のハミルトン安定性について述べる.

2.1. $\mathbb{C}P^n$ の場合

$\mathbb{C}P^n \simeq SU(n+1)/S(U(1)\times U(n)) = G/K$ を正則断面曲率 4 を持つ複素射影空間とする．この場合, K の極大トーラス T^n が正則等長的に $\mathbb{C}P^n$ に作用しており, T^n-作用の主軌道は全てラグランジュかつハミルトン極小となる．次の結果は小野 [13] によって始め示された:

定理 4 ([13])**.** $\mathbb{C}P^n$ 内の任意のラグランジュ T^n-軌道はハミルトン安定である.

この事実は, 次の命題の直接的な帰結である (この証明は筆者による):

命題 5. $\hat{L}$ を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内のラグランジュ部分多様体であって, Hopf-作用 $S^1 \curvearrowright \mathbb{C}^{n+1}$ に関して不変であるものとする．また Hopf-作用による商を $L = \hat{L}/S^1$ とかくと L は $\mathbb{C}P^n$ 内のラグランジュ部分多様体である．その上で, 次が成り立つ:

(1) $\hat{L} \to \mathbb{C}^{n+1}$ がハミルトン極小であるための必要十分条件は, $L \to \mathbb{C}P^n$ もまたそうなることである.

(2) $\hat{L} \to \mathbb{C}^{n+1}$ がハミルトン極小と仮定する．　このとき, $\hat{L} \to \mathbb{C}^{n+1}$ がハミルトン安定であれば, $L \to \mathbb{C}P^n$ もまたそうである.

証明. (1) は Y. Dong の定理 [3] の特別な場合である[2]. (2) を示す．L が S^1-不変なので, 適当にスケール変換して単位球面 $S^{2n+1}(1)$ に含まれていると仮定して良い．標準的な射影を $\pi : S^{2n+1}(1) \to \mathbb{C}P^n(4)$ とかく．また π の L への制限も同じ π で書くことにする.

L 上の任意の関数 $u \in C^\infty(L)$ を一つ取る．u は $\hat{L}$ 上の S^1-不変関数 $\hat{u} \in C^\infty(\hat{L})$ に持ち上がるが, この $\hat{u}$ の生成するハミルトン変形に関する $\hat{L} \to \mathbb{C}^{n+1}$ の第二変分公式

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathrm{Vol}_{\hat{g}}(\hat{\phi}_t(\hat{L})) = \int_{\hat{L}} |\hat{\Delta}\hat{u}|^2 - 2g(\hat{B}(\hat{\nabla}u, \hat{\nabla}u), \hat{H}) + J\hat{H}(\hat{u})^2 dv_{\hat{L}} \tag{2}$$

を考えよう．ここで ˆ をつけた量は全て $\hat{L} \to \mathbb{C}^{n+1}$ のものである.

まず, π が Riemann 沈め込みであるから, Fubini の定理を用いて

$$\int_{\hat{L}} \hat{f} dv_{\hat{L}} = \int_L \Big(\int_{F_x} \hat{f}|_{F_x}(y) dv_{F_x}(y) \Big) dv_L(x)$$

が任意の $\hat{f} \in C^\infty(\hat{L})$ に対して成り立つ．ここで, $x \in L$ に対し $F_x = \pi^{-1}(x)$ であり, 誘導計量で体積要素を定めている．今, 被積分関数 $\hat{f}$ が S^1-不変であると仮定し, $f \in C^\infty(L)$ を $\hat{f} = f \circ \pi$ となるように定めれば, $S^1 \curvearrowright S^{2n+1}(1)$ の各軌道 (すなわち各 F_x) が等長的であることを用いて,

$$\int_{\hat{L}} \hat{f} dv_{\hat{L}} = \mathrm{Vol}_g(F) \int_L f dv_L \tag{3}$$

[2] 一般のケーラー商にも拡張できるが, 一般の場合ケーラー商空間の上の計量としては Hsiang-Lawson 計量を考えておく必要がある (cf. [3]).

を得る.

(2) に戻って, (2) の被積分関数は $\hat{u}$ も $\hat{L}$ も S^1-不変であるから S^1-不変であることに注意する．一方, π が Riemann 沈め込みだから

$$|\hat{\Delta}\hat{u}|^2(p) = |\Delta u|(x), \quad \hat{\nabla} u = (\hat{\nabla} u)_E, \quad |(\hat{\nabla} u)_E|^2(p) = |\nabla u|^2(x)$$

が任意の $x \in L$ と $p \in \pi^{-1}(x)$ で成り立つ．ここで, $(\hat{\nabla} u)_E$ は Reeb 場 (S^1-方向) に直交する成分を表す. 埋め込み $\hat{L} \to S^{2n+1}(1)$ の第二基本形式と平均曲率ベクトルをそれぞれ B', H' とかく. 再び Hopf 作用 $S^1 \curvearrowright S^{2n+1}(1)$ の各軌道が等長的であることを用いると

$$\pi_* H' = H$$

が成り立つことが分かる (右辺は $L \to \mathbb{C}P^n(4)$ の平均曲率ベクトル, cf. [7])[3]．他方, $S^{2n+1}(1)$ が全臍的であることと π が Riemann 沈め込みであることを用いると, 簡単な計算により

$$\begin{aligned} g(\hat{B}(\hat{\nabla} u, \hat{\nabla} u), \hat{H}) &= g(B'((\hat{\nabla} u)_E, (\hat{\nabla} u)_E, H') + (n+1)|(\hat{\nabla} u)_E|^2 \\ &= g(B(\nabla u, \nabla u), H) + (n+1)|\nabla u|^2 \\ J\hat{H}(\hat{u})^2 &= JH'(\hat{u})^2 = JH(u)^2 \end{aligned}$$

が分かる. 以上の議論と (2) および (3) から,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathrm{Vol}_{\hat{g}}(\hat{\phi}_t(\hat{L})) &= \mathrm{Vol}_g(F) \int_L |\Delta u|^2 - 2(n+1)|\nabla u|^2 - 2g(B(\nabla u, \nabla u), H) + JH(u)^2 dv_L \\ &= \mathrm{Vol}_g(F) \cdot \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathrm{Vol}_g(\phi_t(L)) \end{aligned}$$

を得る．よって, $L \to \mathbb{C}^{n+1}$ がハミルトン安定であれば, $L \to \mathbb{C}P^n$ もまたそうである． □

$\mathbb{C}P^n$ 内のトーラス軌道 $L = T^n \cdot x$ の場合には, その引き戻し $\hat{L} := \pi^{-1}(L)$ は $\mathbb{C}^{n+1}$ のいずれかの直積トーラス $T(r_1, \ldots, r_{n+1})$ に一致している．一方で, Y.-G.Oh の定理により, 任意の直積トーラス $\hat{L}$ は $\mathbb{C}^n$ 内でハミルトン安定であったから, 命題 5 により $L \to \mathbb{C}P^n$ もハミルトン安定である.

さて, 定理 4 を踏まえて, 一般のコンパクトトーリックケーラー多様体のトーラス軌道の場合を考えることは自然であろう．ここで, 複素 n 次元コンパクトケーラー多様体 (M, ω, J) が**トーリック**であるとは, 実 n 次元トーラス T^n が正則等長的に M に効果的に作用していることとする. Delzant 構成によるトーリック・シンプレクティック多様体の構成は, これを $\mathbb{C}^n$ からのケーラー商と思うことにより, コンパクトトーリックケーラー多様体の標準的な構成法を与える．T^n-作用による主軌道は全てラグランジュであり, 等質性からハミルトン極小であることも従う．ハミルトン安定性については, 命題 5 のように (i.e. $\mathbb{C}P^n$ の場合のように) 綺麗に議論が進まない事情が幾つかあり, 工夫が必要である.

小野肇 [13] は, トーリックケーラー多様体 M 上の (開かつ稠密な) 複素座標系 $M^o \simeq \mathbb{R}^n \times \sqrt{-1}T^n$ の上でトーラス軌道のハミルトン安定性を解析した．この方法では, 各

[3] ファイバーの体積が一定でなければ成り立たない (cf. [7]).

トーラス軌道を明示的に扱えるだけでなく, M^o 上において定義されるケーラーポテンシャル φ (i.e. $\omega = 2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$ on M^o) を用いて, 第二変分の解析に必要な幾何学的情報 (Ricci 形式, トーラスの第二基本形式, 平均曲率など) を書き下すということが出来る．この事実と平坦トーラス上の調和解析を組み合わせることで, 各トーラス軌道が M 内でハミルトン安定になるめの必要十分条件を, $L^2(T^n)$ の基底に対応するベクトル $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ に関する, ポテンシャル φ(とトーラス) によって決まる係数を持つ四次多項式の満たすべき不等式として与えることが出来る (Theorem 1.2 in [13]). 小野はこれを用いて, 定理 4 の (別) 証明を与え, さらに $(\mathbb{C}P^{n_1} \times \mathbb{C}P^{n_2}, a\omega_{FS} \oplus b\omega_{FS})$ 内のトーラス軌道も全てハミルトン安定である, という結果を証明している (Thoerem 1.3 in [13]).

2.2. $\mathbb{C}H^n$ の場合

$\mathbb{C}H^n \simeq SU(1,n)/S(U(1) \times U(n)) = G/K$ を正則断面曲率 -4 を持つ複素双曲空間とする．$\mathbb{C}H^n$ を考える際に最初に注意すべき事実は, 大域的に Darboux の定理が成り立つこと, すなわち, $\mathbb{C}H^n$ はシンプレクティック多様体としては $\mathbb{C}^n$ と同一視されることである． 実際, シンプレクティック微分同相写像を

$$\Phi : \mathbb{C}H^n \simeq B^n \to \mathbb{C}^n \quad z \mapsto \sqrt{\frac{1}{1-|z|^2}}z \tag{4}$$

により与えることができる[4]．ここで, 標準的に $\mathbb{C}H^n$ を open unit ball B^n と同一視した. 写像 Φ は K-同変であり, K は $G = SU(1,n)$ の極大コンパクト連結部分群だから, $\mathbb{C}H^n$ 内の任意のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体は, Φ を通じて, $\mathbb{C}^n$ 内のそれと対応する．また, この逆構成も作ることができる (cf. [4])． 例えば, 極大コンパクト部分群 K の極大トーラス T^n の $\mathbb{C}H^n$ への作用はハミルトン的であり, すべての正則 T^n-軌道はラグランジュである．これらは, $\mathbb{C}^n$ 内の直積トーラス $T(r_1, \ldots, r_n) := S^1(r_1) \times \cdots \times S^1(r_n)$ と 1:1 に対応している．このトーラス軌道について, 論文 [8] において次を示した.

定理 6 ([8]). (a) $n \leq 2$ ならば, $\mathbb{C}H^n$ 内のすべてのラグランジュ T^n-軌道はハミルトン安定かつ *rigid* である.

(b) $n \geq 3$ とする．もし相異なる添字 $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ で, 不等式

$$\left(1 + \sum_{l=1}^{n} r_l^2\right)^{1/2} r_i < r_j r_k \tag{5}$$

を満たすものが存在するならば, 対応する T^n-軌道 $\Phi^{-1}(T(r_1, \ldots, r_n))$ は $\mathbb{C}H^n$ 内でハミルトン不安定である．特に $\mathbb{C}H^n$ 内にはハミルトン不安定な T^n-軌道が無数に存在する．一方で, 任意の $n \geq 1$ と $r > 0$ に関して, 単調ラグランジュ T^n-軌道 $\Phi^{-1}(T(r, \ldots, r))$ は $\mathbb{C}H^n$ 内でハミルトン安定かつ *rigid* である.

以下に証明の方針と概略を述べる．詳細は論文 [8] を参照して頂きたい.

証明の概略. 前提としてまず, 等質部分多様体に関する議論なので, 調和解析を用いて第二変分 (1) を評価することが基本的な方針である．ところが, この (極小でない) ハミ

[4] より一般に, 任意の非コンパクト型エルミート対称空間が標準的 $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$ とシンプレクティック微分同相であることが知られている (cf. McDuff [10]).

ルトン極小ラグランジュ部分多様体に対する第二変分公式が, その部分多様体の内在的量 (誘導計量) だけでなく, 外在的量 (第二基本形式と平均曲率) にも依存してしまう点に一つの困難さがある. すなわち, 等長的でない軌道が無数にある状況の中で, 「各軌道に対して, 必要な (双曲計量に関する) 幾何学量をどのようにして得るか」という問題が最初に起こる. 同じ問題は $\mathbb{C}P^n$ やトーリックケーラー多様体内のトーラス軌道の場合でも当然起こっていたのだが, この場合には Hopf ファイブレーションやトーリックケーラー幾何を用いて巧妙に回避できていることに注意しておく (前節参照)[5]. 一方, $\mathbb{C}H^n$ の場合は, $\mathbb{C}H^n$ の幾何学を用いて, この問題をある程度回避することができる[6]:

$\mathbb{C}H^n$ と $\mathbb{C}^n$ の間には, K-同変なシンプレクティック微分同相写像 Φ を (4) で定めることができたことを思い出す. Φ は K-軌道を K-軌道に写すが, ここで言う K-軌道は $\mathbb{C}H^n$ および $\mathbb{C}^n$ それぞれの測地球面に他ならない. $\mathbb{C}H^n$ 内の半径 r の測地球面を S_r^{2n-1} とかくと, $\Phi(S_r^{2n-1}) = S^{2n-1}(\sinh r) \subset \mathbb{C}^n$ であることが容易にわかる. 一方, これらは K の中心 $C(K) \simeq S^1$-作用に関する運動量写像 μ の正則なレベルセットでもあり, $C(K)$-作用に関するケーラー商は, 共に, Fubini-Study 計量を持つ複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n-1}(4/\sinh^2 r)$ であることが簡単な考察でわかる. そこで今, ラグランジュ部分多様体 L に $C(K)$-不変性を課すと, 次の可換図式が成立することが分かる:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (B^n,\omega) & \xrightarrow[\text{symp. diffeo.}]{\Phi} & (\mathbb{C}^n,\omega_0) \\
 & & \cup & & \cup \\
L & \rightarrow & S_r^{2n-1} & \xrightarrow[\text{diffeo.}]{\Phi} & S^{2n-1}(\sinh r) \\
\downarrow & & \pi_1\downarrow & & \pi_2\downarrow \\
L/S^1 & \rightarrow & \mathbb{C}P^{n-1}(\frac{4}{\sinh^2 r}) & = & \mathbb{C}P^{n-1}(\frac{4}{\sinh^2 r})
\end{array}$$

今, $C(K)$-不変な埋め込み $L \to \mathbb{C}H^n \simeq B^n$ を ϕ_1, Φ を通じた $\mathbb{C}^n$ への埋め込みを $\phi_2 := \Phi \circ \phi_1$ とかこう. 上の幾何的状況が示しているように, ϕ_1 と ϕ_2 をそれぞれ $C(K) \simeq S^1$-作用で商をとると同じ埋め込みになるのだから, この二つの写像を比較することは比較的容易にできる. 実際, 埋め込み $\phi_1 : L \to \mathbb{C}H^n$ に関する第二変分公式を $\phi_2 : L \to \mathbb{C}^n$ の幾何学量を用いて次のように書き直すことができる:

定理 7 ([8])**.** *$\phi_1 : L \to \mathbb{C}H^n$ を $C(K)$-不変なハミルトン極小ラグランジュ埋め込みとし, $\phi_2(L)$ は半径 r の測地球面 S_r^{2n-1} に含まれているとする. このとき, ϕ_1 が $\mathbb{C}H^n$ 内でハミルトン安定であるための必要十分条件は, 対応する $\mathbb{C}^n$ への埋め込み $\phi_2 := \Phi \circ \phi_1 : L \to \mathbb{C}^n$ に対し, 不等式*

$$\begin{aligned}
\int_L & |\Delta_2 u|^2 - 2g_2(B_2(\nabla_2 u, \nabla_2 u), H_2) + J_2 H_2(u)^2 \qquad (6)\\
& + 2\tanh^2 r \cdot \Delta_2 u \cdot \xi_2\xi_2(u) - 2\frac{\tanh r}{\cosh r}\xi_2(u) J_2 H_2(u) \\
& + \tanh^4 r |\xi_2\xi_2(u)|^2 - \frac{\tanh^2 r}{\cosh^2 r}|\xi_2(u)|^2 dv_{g_2} \geq 0
\end{aligned}$$

---

[5] $\mathbb{C}^n$ 内の平行ラグランジュ部分多様体の場合は, それが球面 S^{2n-1} 内で極小であることを用いて第二変分を簡略化している [1].

[6] 命題 5のときと同様に, 複素擬ユークリッド空間 $\mathbb{C}^{1,n}$ 内の anti-de-Sitter 空間 AdS_{2n+1} からの Hopf ファイブレーション $\pi : AdS_{2n+1} \to \mathbb{C}H^n$ に関する引き戻しをまず考えるのが妥当に思われるかもしれないが, この場合基本的に考える計量が「擬計量」なため, $\mathbb{C}^{1,n}$ 内のラグランジュ部分多様体に対し「体積変分に関する安定性」の概念をどう適切に定義するかという別の問題が起こる. これはこれで面白い問題と思われるが, 今回は別の (新しい) 方法を用いた.

が全ての $u \in C^\infty(L)$ に対して成立することである．ここで，$\mathbb{C}^n$ のケーラー構造を (ω_2, J_2, g_2) と書き，Δ_2, ∇_2, B_2, H_2 はそれぞれ $\phi_2 : L \to \mathbb{C}^n$ のラプラシアン，グラディエント，第二基本形式，平均曲率ベクトルである．また，ξ_2 は球面 $S^{2n-1}(\sinh r)$ 上の *Reeb* ベクトル場で，$J_2\xi_2$ が内向きの単位法線ベクトルになるように取っている．

この定理において，ラグランジュ部分多様体に $C(K)$-不変性と言う仮定をつけたが，$\mathbb{C}H^n$ 内の任意のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体は $C(K)$-不変 (かつハミルトン極小) であることに注意しておく．また，$C(K)$-不変なハミルトン極小ラグランジュ部分多様体は，複素射影空間 $\mathbb{C}P^{n-1}$ 内のハミルトン極小ラグランジュ部分多様体と 1:1 に対応する．

定理 7 により，(見かけの複雑さは増したものの) $\mathbb{C}H^n$ 内の $C(K)$-不変ラグランジュ部分多様体に対する第二変分の解析を $\mathbb{C}^n$ 内の対応するラグランジュ部分多様体の上でできるようになった．特に，最初の問題であった「$L \to \mathbb{C}H^n$ の双曲計量に関する幾何学量」を直接求める必要がなくなり，代わりに「$L \to \mathbb{C}^n$ のユークリッド計量に関する幾何学量」を求めれば十分と言うことになる．例えば，$\mathbb{C}H^n$ の T^n-主軌道は，$\mathbb{C}^n$ 内の直積トーラス $T(r_1, \ldots, r_n) = S^1(r_1) \times \cdots \times S^1(r_n)$ と対応していたが，この直積トーラスの第二基本形式と平均曲率ベクトルは，容易に

$$B_2(\partial_i, \partial_j) = \delta_{ij} J\partial_i \quad \text{and} \quad H_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i^2} J\partial_i,$$

と求めることができる．ここで，∂_i は i-番目の S^1 の基底である．また，誘導計量に関してもそれが平坦計量として容易に書き下せる．

以上により，解析すべき作用素 (第二変分) の具体的な情報が分かったので，あとは等質部分多様体上 (例えば直積トーラス上) で調和解析を行えば良いのだが，最後に「(全ての L^2-基底 $u \in C^\infty(L)$ に対し) (6) を評価する」と言う問題が残っている．トーラス軌道の場合，(6) は n 変数 (+ トーラス軌道のモジュライの次元 n) のある 4 次多項式を評価する問題に帰着されるが，それでも緻密な評価が必要になる．詳細は論文 [8] を参照して頂きたい．

最後に不等式 (5) について簡単に触れておく．この不等式は，直積トーラス上のある特定の関数 (ある L^2-基底)

$$u_c = \cos(\theta_i + \theta_j - \theta_k) \quad \text{or} \quad u_s = \sin(\theta_i + \theta_j - \theta_k)$$

を取ったときに，(6) が負になるための必要十分条件となっていて，不等式 (5) を満たす直積トーラスについては，$J\nabla u_c$ (or $J\nabla u_s$) の方向のハミルトン変形が体積を減らす変形として取れることを意味する．例えば，不等式 (5) は直積トーラスのある 1 つの半径 r_i が十分小さい時に満たされる． $\square$

なお，以上の計算手法は，原理的に，トーラス軌道に限らず，$\mathbb{C}H^n$ 内の任意のコンパクト等質ラグランジュ部分多様体に対して適用できるものであることに注意しておく．

3. トーラス軌道のハミルトン体積非最小性

最初の問題に戻って，ハミルトン体積最小性について考えよう．$\mathbb{C}^n$(例 1) や $\mathbb{C}P^n$(定理 4) の場合とは対照的に，$n \geq 3$ のときは $\mathbb{C}H^n$ 内にハミルトン不安定なトーラス軌道が無

数に存在し, 当然これらは体積最小性を有しない. 実は, $n \geq 3$ のときは, $\mathbb{C}^n$ でも $\mathbb{C}P^n$ でも (この場合, いつでもトーラス軌道がハミルトン安定であるにも関わらず) 体積非最小性を示すことができる:

定理 8 ([5], [8]). *$n \geq 3$ と仮定する. このとき, 複素空間形 $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{C}H^n)$ 内のほとんどすべてのトーラス軌道はハミルトン体積最小ではない.*

ここで, 「ほとんどすべて」とは, トーラス作用に関する moment polytope D の中で, ハミルトン体積非最小なトーラス軌道に対応する点全体の集合が稠密になっているという意味である. $\mathbb{C}^n$ と $\mathbb{C}H^n$ の場合のこの定理は, 次の Chekanov による重要な結果の帰結として得られる ($\mathbb{C}P^n$ の場合にはもう少し精密な議論をする必要がある. 一般のコンパクトトーリックケーラー多様体の場合の結果も含めて [5] を参照):

ベクトル $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ に対し, $T(\mathbf{a}) := S^1(\sqrt{a_1/\pi}) \times \cdots \times S^1(\sqrt{a_n/\pi}) \subset \mathbb{C}^n$ と書く. また,

$$\underline{\mathbf{a}} := \min\{a_i; 1 \leq i \leq n\}, \quad m(\mathbf{a}) := \#\{i; a_i = \underline{\mathbf{a}}\}, \quad \Gamma(\mathbf{a}) := \mathrm{span}_{\mathbb{Z}}\langle a_1 - \underline{\mathbf{a}}, \ldots, a_n - \underline{\mathbf{a}}\rangle$$

とおく. このとき, 次が成り立つ:

定理 9 (Chekanov [2]). *$\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ とする. 直積トーラス $T(\mathbf{a})$ と $T(\mathbf{a}')$ が $(\mathbb{C}^n, \omega_0)$ 内でハミルトンイソトピックであるための必要十分条件は, $(\underline{\mathbf{a}}, m(\mathbf{a}), \Gamma(\mathbf{a})) = (\underline{\mathbf{a}}', m(\mathbf{a}'), \Gamma(\mathbf{a}'))$ が成立することである.*

この定理を用いて, $\mathbb{C}H^n$ の場合の定理8の証明を与えておこう (この証明のアイディアは, $\mathbb{C}^n$ の場合における Viterbo[15] および入江-小野 [5] による):

定理8の証明 ($\mathbb{C}H^n$ の場合). 簡単のため $r_i := \sqrt{a_i/\pi} (i = 1, \ldots, n)$ とおく. K-同変なシンプレクティック微分同相 Φ による引き戻し $\Phi^{-1}(T(\mathbf{a}))$ は, $\mathbb{C}H^n$ 内のトーラス軌道であるが, この $\mathbb{C}H^n$ 内における体積は,

$$\mathrm{Vol}_{g_{\mathbb{C}H^n}}(\Phi^{-1}(T(\mathbf{a})) = (2\pi)^n \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^n r_i^2\right)^{1/2} \prod_{i=1}^n r_i. \tag{7}$$

で与えられる (このことは, 前節同様に $\mathbb{C}H^n$ および $\mathbb{C}^n$ からの誘導計量を比較すれば分かる). 今, 「$\mathbf{a}$ の成分の内, 少なくとも3つの成分が異なる値を持つ」と仮定する (そのためには, $n \geq 3$ が必要であることに注意). このとき, $\underline{\mathbf{a}} = a_i < a_j < a_k$ となるように a_i, a_j, a_k を選んで置ける. これを用いて, 新たに $\mathbf{a}'$ を

$$\mathbf{a}' := (a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k - a_j + a_i, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

と定めると, $\underline{\mathbf{a}} = a_i < a_j < a_k$ なので, $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}' = a_i$ かつ $m(\mathbf{a}) = m(\mathbf{a}')$ である. また, $\Gamma(\mathbf{a}')$ の元 v は, $v = \sum_{l \neq k} m_l(a_l - a_i) + m_k(a_k - a_j) = \sum_{l \neq j} m_l(a_l - a_i) + (m_j - m_k)(a_j - a_i)$ とかけるので, $v \in \Gamma(\mathbf{a})$ となる. 逆も明らかに成り立ち, $\Gamma(\mathbf{a}) = \Gamma(\mathbf{a}')$ となる. よって定理9により, $T(\mathbf{a})$ と $T(\mathbf{a}')$ は $\mathbb{C}^n$ 内でハミルトンイソトピックであるが, $\Phi : \mathbb{C}H^n \to \mathbb{C}^n$ はシンプレクティック微分同相だから, $\Phi^{-1}(T(\mathbf{a}))$ と $\Phi^{-1}(T(\mathbf{a}'))$ は $\mathbb{C}H^n$ 内でハミルトンイソトピックである. 一方, $\mathbf{a}'$ の取り方から, $a'_l = a_l$ $(\forall l \neq k)$ および $a'_k < a_k$(従ってまた, $r'_k < r_k$) となっていることに注意すると, (7) より

$$\mathrm{Vol}_{g_{\mathbb{C}H^n}}(\Phi^{-1}(T(\mathbf{a}')) < \mathrm{Vol}_{g_{\mathbb{C}H^n}}(\Phi^{-1}(T(\mathbf{a}))$$

を得る．よって，「少なくとも3つの成分が異なる値を持つ$\mathbf{a}$」に対して$\Phi^{-1}(T(\mathbf{a}))$は$\mathbb{C}H^n$内でハミルトン体積最小ではない．そのような$\mathbf{a}$は$(\mathbb{R}_{>0})^n$の中で開かつ稠密な部分集合をなすので結論を得る． $\square$

$\mathbb{C}H^n$の場合は, (5)を満たすトーラスに対しハミルトン不安定性が言えるので, この証明における「少なくとも3つの成分が異なる値を持つ$\mathbf{a}$」という仮定は最良のものではない．事実, $n \geq 3$で$\mathbf{a}$が2種類の成分からなる直積トーラスでも, $\mathbb{C}H^n$内で対応するトーラス軌道がハミルトン不安定になるものが存在する．ところが, $\mathbb{C}^n$でも$\mathbb{C}P^n$でも$\mathbb{C}H^n$でも，「$n = 2$の場合および$n \geq 3$の単調トーラス軌道(すなわちClifford トーラス)の場合」にハミルトン体積最小性が成立するかどうかという問題は, 未だopenである．

参考文献

[1] A. Amarzaya and Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of parallel Lagrangian submanifolds in complex space forms*, a preprint 2008.

[2] Yu.V. Chekanov, *Lagrangian tori in a symplectic vector space and global symplectomorphisms.* Math. Z. 223 (1996), no. 4, 547–559.

[3] Y. Dong, *Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in Kaehler manifolds with symmetries.* Nonlinear Anal. **67** (2007), no. 3, 865–882.

[4] T. Hashinaga and T. Kajigaya, *A class of non-compact homogeneous Lagrangian submanifolds in complex hyperbolic spaces*, Ann. Global Anal. Geom. 51 (2017), no. 1, 21–33.

[5] H. Iriyeh and H. Ono, Almost all Lagrangian torus orbits in $\mathbb{C}P^n$ are not Hamiltonian volume minimizing. Ann. Global Anal. Geom. 50 (2016), no. 1, 85–96.

[6] D. Joyce, Y.-I. Lee, R. Schoen, *On the existence of Hamiltonian stationary Lagrangian submanifolds in symplectic manifolds.* Amer. J. Math. 133 (2011), no. 4, 1067–1092.

[7] T. Kajigaya, *Reductions of minimal Lagrangian submanifolds with symmetries.* Math. Z. 289 (2018) no. 3–4, pp 1169–1189.

[8] T. Kajigaya, *On Hamiltonian stable Lagrangian tori in complex hyperbolic spaces*, 26 pages, arXiv:1808.07745.

[9] 國川慶太, 梶ヶ谷徹, ファノ多様体内のラグランジュ平均曲率流の収束, 数理解析研究所講究録 No.2068, p1-21.

[10] D. McDuff, *The symplectic structure of Kähler manifolds of nonpositive curvature.* J. Differential Geom. 28 (1988), no. 3, 467–475.

[11] Y.-G. Oh, *Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, Invent. Math. **101** (1990), 501–519.

[12] Y. -G. Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Z. 212 (1993), 175–192.

[13] H. Ono, *Hamiltonian stability of Lagrangian tori in toric Kähler manifolds.* Ann. Global Anal. Geom. 31 (2007), no. 4, 329–343.

[14] R. Osserman, *The isoperimetric inequality.* Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), no. 6, 1182–1238.

[15] C. Viterbo, *Metric and isoperimetric problems in symplectic geometry.* J. Am. Math. Soc. **13**, 411–431 (2000).