Associative部分多様体の2次変形

河井　公大朗（学習院大学）*

0　記号

M を多様体、$E \to M$ をベクトル束とする。$E \to M$ の切断全体の空間を $\Gamma(M, E)$ と書く。また $E = \Lambda^k T^*M$ のとき $\Omega^k(M) = \Gamma(M, \Lambda^k T^*M)$ と書く。

1　変形理論について

最近は様々な数学的対象のモジュライ空間を考える動きが盛んである。大雑把にいえば、ある特定の性質をもつものを全部集めてきて ($\mathcal{M}$ とかく)

$$\mathcal{M} = \{\text{ある特定の性質をもつもの}\}$$

その構造を調べようというものである。$\mathcal{M}$ の局所的な性質を調べる理論を**変形理論**という。

$\mathcal{M}$ の大域的な構造を調べることは一般にかなり難しいが、局所的な様子はわかることが多い。幾何学でよくある状況は、$\mathcal{M}$ が局所的にある PDE の解空間になる場合である。つまり L をコンパクト多様体、$E_1, E_2 \to L$ をベクトル束とし $U \subset \Gamma(L, E_1)$ を開集合とする。このとき、偏微分作用素 $F : U \to \Gamma(L, E_2)$ ($F(0) = 0$) があって $\mathcal{M}$ は局所的に $F^{-1}(0)$ になるという状況を考える。

$\mathcal{M}$ は滑らかな多様体の構造を持つか（特に $F^{-1}(0)$ は 0 の近傍である Fréchet 空間の開集合と同相か）という問いは、変形理論における基本的な問いである。

これを考える方法の 1 つは、**陰関数定理**を用いる方法である。つまり F の 0 における線形化

$$D = (dF)_0 : \Gamma(L, E_1) \to \Gamma(L, E_2)$$

が全射であるならば、$F^{-1}(0)$ は滑らかで次元は $\dim \ker D$ になる。（正確には、F を Hölder space 等のバナッハ空間に拡張して考える必要がある。）$\ker D$ のことを**無限小変形の空間**という。

*本研究は JSPS 科研費 17K14181 の助成を受けたものである。
e-mail: kkwai@math.gakushuin.ac.jp

例 **1.** 陰関数定理が使える例

- $G_2, \mathrm{Spin}(7)$ 多様体 ([Joyce])
- 特殊ラグランジュ部分多様体、coassociative 部分多様体 ([Mclean])
- ラグランジュ部分多様体、ルジャンドル部分多様体
- J-holomorphic curve (generic な J に対して)

陰関数定理が使えない場合は、話は複雑になる。$F^{-1}(0)$ が滑らかであるためには、無限小変形 $V \in \ker D$ が与えられたとき、1 パラメーター族 $\{V(t)\}_{t\in(-\epsilon,\epsilon)} \subset \Gamma(L, E_1)$ で

$$F(V(t)) = 0 \qquad \text{かつ} \qquad V(0) = 0, \quad \left.\frac{d}{dt}V(t)\right|_{t=0} = V$$

となるものが存在しなければならない。このような $\{V(t)\}$ が存在するとき、無限小変形 $V \in \ker D$ は**非障害的 (unobstructed)** という。(可積分とも言う。)[1]

これを調べるには、$V(t) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k t^k / k!$ $(V_k \in \Gamma(L, E_1))$ と t について（形式的に）**ベキ級数展開**して、その係数を逐次決めていくという方法を取る。

つまり問題は、$F(V(t)) = 0$ を t に関するベキ級数と見たとき、t のベキ乗の各係数が 0 になるように $V_2, V_3, \cdots$ を定められるかという問題になる。$F(V(t))$ の t^k の係数を $k!$ 倍したものは

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}F(V(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{d^k}{dt^k}F\left(tV_1 + \frac{t^2}{2!}V_2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}V_k\right)\right|_{t=0}$$

なので、これが 0 になるように $V_2, V_3, \cdots$ を定められるかという問題である。例えば $k = 2, 3$ の場合は

$$\frac{d^2}{dt^2}F(V(t)) = \frac{d}{dt}\left((dF)_{V(t)}\left(\frac{dV(t)}{dt}\right)\right) = (d^2F)_{V(t)}\left(\frac{dV(t)}{dt}, \frac{dV(t)}{dt}\right) + (dF)_{V(t)}\left(\frac{d^2V(t)}{dt^2}\right)$$

であるから、$k = 2, 3$ の場合に満たすべき式は以下のようになる。

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}F(V(t))\right|_{t=0} = (d^2F)_0(V_1, V_1) + D(V_2) = 0, \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{d^3}{dt^3}F(V(t))\right|_{t=0} = (d^3F)_0(V_1, V_1, V_1) + 3(d^2F)_0(V_1, V_2) + D(V_3) = 0. \tag{1.2}$$

このような解 $V_2, V_3, \cdots$ が存在するかどうかは、一般にはわからない。そこで、これに関連して次の定義をする。

[1]「モジュライ空間が滑らか（局所的にある Fréchet 空間の開集合と同相）」ならば、「全ての無限小変形は非障害的」である。逆は必ずしも成立しないように見えるが、今までみた文献では、この二つの概念は同一視されているように思える。

定義 2. $k \geq 2$ とする。無限小変形 $V = V_1 \in \ker D$ が k **次まで非障害的**とは、ある $V_2, \cdots, V_k \in \Gamma(L, E_1)$ が存在して

$$\frac{d^l}{dt^l} F\left(tV_1 + \frac{t^2}{2!}V_2 + \cdots + \frac{t^l}{l!}V_l\right)\bigg|_{t=0} = 0 \qquad (1 \leq \forall l \leq k)$$

となることである。別の言い方をすると、これは $tV_1 + \frac{t^2}{2!}V_2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}V_k$ が up to $o(t^k)$ で $F^{-1}(0)$ の元を定めるということである。

注意 3. V が非障害的ならば、任意の $k \geq 2$ に対して V は k 次まで非障害的である。実際、$F(V(t)) = 0$ の両辺の l 階微分と、$V(t)$ の t に関する *Taylor* 展開を考えればよい。これは対偶を取れば

<u>ある k があって V は k 次まで非障害的でなければ、V は非障害的ではない</u>

ということである。この事実は、無限小変形が非障害的でないことを示す際によく用いられる。

例 4.

- 2 次まで非障害的でない
  - $\mathbb{C}P^{2l} \times S^2 (l \geq 2)$ 上の Einstein 計量の変形 ([小磯])
  - $\mathrm{SU}(3)/T^2$ 上の nearly Kähler 構造の変形 ([Foscolo])
- 2 次まで非障害的だが、3 次まで非障害的でない
  - $T^2 \to S^3$ の調和写像の変形 ([向井])
- 非障害的である
  - Calabi-Yau 多様体上の複素構造の変形 ([Tian, Todorov])

注意 5.

- 陰関数定理が用いることができない場合は、変形が非障害的であることは稀である。その意味で *Tian, Todorov([Tian, Todorov])* の結果は驚くべき結果である。更に、後藤 *([後藤])* は「閉微分形式の定める幾何構造」という概念を導入し、*Tian, Todorov* の結果を含む統一的な変形理論を構築した。
- *nearly Kähler* 構造の類似として、*3* 章で述べる *nearly parallel* G_2 構造がある。等質なものは分類されており、その無限小変形も *[AS]* により調べられている。それによると *Aloff-Wallach space* $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(1)$ は無限小変形を持つが、非障害的かどうかは未解決である。*nearly Kähler* との類似性や、*3*-佐々木多様体との関係から、これも *2* 次まで非障害的でないと期待される。
- 変形理論を *DGLA(Differential graded Lie algebra)*(より一般に L_∞ 代数)を用いて、代数的に扱う流儀もある。*Tian,Todorov* の結果もこの枠組みで捉えられる *([Manetti1, IM])*。また近年、後藤 *([後藤])* の変形理論もこの枠組みで捉えられることが示された *([Papayanov])*。

2　部分多様体の変形

(M,g) をリーマン多様体とし、$L \subset M$ をコンパクト部分多様体とする。

管状近傍定理により、部分多様体 L の法束 ν の零切断のある開近傍 $\mathcal{U}$ と、L の M におけるある開近傍（管状近傍）は指数写像により微分同相になる。

$$\Gamma(L,\mathcal{U}) = \{V \in \Gamma(L,\nu) \mid \text{任意の } x \in L \text{ に対して } V_x \in \mathcal{U}\}$$

とおくと、これは $\Gamma(L,\nu)$ の開集合になる。したがって

(※)L に (C^1 の意味で) 近い部分多様体は指数写像により $\Gamma(L,\mathcal{U})$ の元と同一視できる。

今 M 上の微分形式 $\Phi \in \Omega^*(M)$ をとり、Φ の制限が 0 となるようなコンパクト部分多様体のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ を考える。

$$\mathcal{M} = \{L' \subset M : \text{部分多様体} \mid \Phi|_{L'} = 0\}.$$

$L \in \mathcal{M}$ とし、1 階偏微分作用素 $F : \Gamma(L,\mathcal{U}) \to \Omega^*(L)$ を次のように定義する。

$$F(V) = exp_V^* \Phi \tag{2.1}$$

ここで $V \in \Gamma(L,\nu)$ に対して $\exp_V : L \to M$ を $\exp_V(x) = \exp_x(V_x)$ で定義した。（右辺はリーマン幾何における通常の指数写像。）$\exp_V(L) = \{\exp_x(V_x); x \in L\}$ とかく。このとき $\Phi|_{\exp_V(L)} = 0$ と $F(V) = 0$ は同値になる。よって (※) より、$\mathcal{M}$ は局所的に $F^{-1}(0)$ と同相である。

注意 6. いくつかの場合には、陰関数定理を用いてモジュライ空間が滑らかになることを示せることが多い。*[森山, 河井 1]* には、そのための条件がまとめられている。適用できる場合は、以下のようなものがある。

- モジュライ空間が滑らかで有限次元多様体になる場合
  - 特殊ラグランジュ部分多様体
  - *coassociative* 部分多様体
- モジュライ空間が滑らかで無限次元多様体 *(Fréchet* 多様体*)* になる場合
  - ラグランジュ部分多様体
  - ルジャンドル部分多様体

特殊ラグランジュ部分多様体、coassociative 部分多様体のモジュライ空間が滑らかになることは、[Mclean] により示された。彼は特殊なホロノミー群をもつ多様体の calibrated submanifold の変形を考え、上 2 つは滑らかなモジュライ空間を持つことを示した。彼は他にも 2 つの calibrated submanifold の変形を考えたが、それらのモジュライ空間は滑らかになるとは限らない。

以下では、そのうちの 1 つの associative 部分多様体の変形について考える。そのためにまず次章で、G_2 幾何学の復習から始める。

3　G_2 幾何学

定義 7. $(x^1, \cdots, x^7)$ を $\mathbb{R}^7$ の標準座標とし、$\mathbb{R}^7$ 上の 3-form φ_0 を次で定義する。

$$\varphi_0 = dx^{123} + dx^1(dx^{45} + dx^{67}) + dx^2(dx^{46} + dx^{75}) - dx^3(dx^{47} + dx^{56}),$$

ここで外積の記号は省略した。φ_0 は次を満たすことが知られている。

$$G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}); g^*\varphi_0 = \varphi_0\} \subset \mathrm{SO}(7).$$

Lie 群 G_2 の $\mathbb{R}^7$ の作用は、$\mathbb{R}^7$ の標準計量 g_0、体積要素 vol_{g_0}、および φ の Hodge 双対 $*\varphi_0$ を保つ。これらは次の関係式より φ_0 から一意的に定まる。

$$6g_0(v_1, v_2)\mathrm{vol}_{g_0} = i(v_1)\varphi_0 \wedge i(v_2)\varphi_0 \wedge \varphi_0 \qquad (v_i \in \mathbb{R}^7). \tag{3.1}$$

cross 積 $\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^7 \times \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ を

$$g_0(v_1 \times v_2, v_3) = \varphi_0(v_1, v_2, v_3) \qquad (v_i \in \mathbb{R}^7) \tag{3.2}$$

で定義する。cross 積は $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}\mathbb{O}$ (8 元数の虚部) とみたとき、8 元数の積を表現している。また tangent bundle に値を取る 3-form $\chi_0 \in \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^* \otimes \mathbb{R}^7$ を

$$g_0(\chi_0(v_1, v_2, v_3), v_4) = *\varphi_0(v_1, v_2, v_3, v_4) \qquad (v_i \in \mathbb{R}^7) \tag{3.3}$$

と定める。これは次を満たす。

$$|\varphi_0(v_1, v_2, v_3)|^2 + |\chi_0(v_1, v_2, v_3)|^2 = |v_1 \wedge v_2 \wedge v_3|^2 \qquad (v_i \in \mathbb{R}^7). \tag{3.4}$$

これより φ_0 は $\mathbb{R}^7$ 上の calibration になることがわかる。

定義 8. (M^7, g) を向きづけられた 7 次元リーマン多様体とし、φ を M^7 上の 3-form とする。φ が M^7 上の **G_2 構造**であるとは、各 $x \in M^7$ に対して、向きを保つ同型 $T_xM^7 \cong \mathbb{R}^7$ が存在して、それにより φ_x と φ_0 が同一視され、g_x が φ_x から誘導される計量であるときをいう。

また (M^7, φ, g) が G_2 構造を持つとする。

- (M^7, φ, g) が **(torsion-free) G_2 多様体** $\overset{def}{\Leftrightarrow} d\varphi = 0, d * \varphi = 0$
  $\overset{[\mathrm{FG}]}{\Leftrightarrow} \nabla\varphi = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Hol}(M^7, g) \subset G_2.$
- (M^7, φ, g) が **nearly parallel G_2 多様体** $\overset{def}{\Leftrightarrow} d\varphi = 4 * \varphi$
  $\overset{[\mathrm{FG}]}{\Leftrightarrow} \nabla\varphi = *\varphi$
  $\overset{[\mathrm{B\ddot{a}r}]}{\Leftrightarrow} \mathrm{Hol}(C(M^7), \overline{g}) \subset \mathrm{Spin}(7).$

ここで ∇ は g の Levi-Civita 接続、$\mathrm{Hol}(M^7, g)$ は (M^7, g) のホロノミー群、$(C(M^7), \overline{g}) = (\mathbb{R}_{>0} \times M^7, dr^2 + r^2 g)$ は (M^7, g) のリーマン錐である。

定義 9. (M^7, φ, g) を G_2 構造を持つ多様体とする。(3.3) のようにして $\chi \in \Omega^3(M^7, TM^7)$ を定める。また $L^3 \subset M^7$ を向きづけられた 3 次元部分多様体とする。

L^3 が **associative 部分多様体** $\overset{def}{\Leftrightarrow} \varphi|_{TL^3} = \mathrm{vol}_{L^3} \overset{(3.4)}{\Leftrightarrow} \chi|_{TL^3} = 0.$

ここで vol_{L^3} とは、M^7 から L^3 に誘導される計量から定まる体積要素である。($d\varphi = 0$ ならば、associative 部分多様体とは φ に関する calibrated submanifold のことである。)

例 10. G_2 多様体と associative 部分多様体の例には次のようなものがある。

associative 部分多様体	(torsion-free) G_2 多様体
（ある）$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^7$
$S^1\times$(正則曲線) $\{*\}\times$(特殊ラグランジュ部分多様体)	$S^1\times$ (3 次元 Calabi-Yau 多様体)

associative 部分多様体	nearly parallel G_2 多様体
(ある) 全測地的 S^3 特殊ルジャンドル部分多様体 $\mathbb{C}P^3$ の正則曲線の $S^7 \to \mathbb{C}P^3$ による引き戻し	S^7
特殊ルジャンドル部分多様体	7 次元佐々木 Einstein 多様体

4 associative 部分多様体の変形

(M^7, φ, g) を G_2 構造をもつ多様体とする。(3.3) のようにして $\chi \in \Omega^3(M^7, TM^7)$ を定める。定義 9 より、associative 部分多様体は χ の制限が 0 になるものとして特徴づけられる。

1 階偏微分作用素 F を、上の $\chi \in \Omega^3(M^7, TM^7)$ に対して (2.1) のように定める。（正確には χ は微分形式ではないので、測地線 $[0,1] \ni t \mapsto \exp_x(tV_x) \in M(x \in L)$ に沿う平行移動等で補正しないといけないが、ここでは省略する。詳細は [河井 3, Section 3.1] を見よ。）すると associative 部分多様体のモジュライ空間は、局所的に $F^{-1}(0)$ に同相である。このとき (2.1) の 0 での線形化

$$D = (dF)_0 : \Gamma(L, \nu) \to \Omega^3(L, \nu) \cong \Gamma(L, \nu)$$

は次のようになる。

命題 11 ([Mclean, Section 5], [Gayet, Theorem 2.1])**.** (M^7, φ, g) を G_2 構造をもつ *7* 次元多様体とし、$L^3 \subset M^7$ をコンパクト *associative* 部分多様体とする。このとき、上記の作用素 D は次のように書かれる。

$$DV = \sum_{i=1}^{3} e_i \times \nabla^{\perp}_{e_i} V + ((\nabla_V * \varphi)(e_1, e_2, e_3, \cdot))^{\sharp}.$$

ここで $\{e_1, e_2, e_3\}$ は TL の局所的な向きづけられた直交枠であり、$i \in \mathbb{Z}/3$ に対して $e_i = e_{i+1} \times e_{i+2}$ を満たす。$\nabla^\perp$ は、(M, g) の *Levi-Civita* 接続から誘導される法束 ν の接続である。. $\sharp : T^*M \to TM$ は計量の誘導する同型写像である。

補題 12 ([河井 3, Lemma 3.3])**.** D は楕円型である。$d * \varphi = 0$ ならば D は *self-adjoint* になる。

以下では、associative 部分多様体が 2 次まで非障害的かどうかを考える。D は楕円型で部分多様体 L はコンパクトだったので、L^2 内積に関する直交分解

$$C^\infty(L, \nu) = \mathrm{Im}D \oplus \mathrm{Coker}D \tag{4.1}$$

を得る。$\pi : C^\infty(L, \nu) \to \mathrm{Coker}D$ を直交射影とすると、(1.1), (4.1) より次が言える。

補題 13. $V_1 \in \ker D$ が *2* 次まで非障害的であることと

$$\pi\left(\frac{d^2}{dt^2}F(tV_1)\right)\bigg|_{t=0} = 0$$

は同値。後者は別の言い方をすると、任意の $W \in \mathrm{Coker}D$ に対して

$$\left\langle \frac{d^2}{dt^2}F(tV_1)\bigg|_{t=0}, W \right\rangle_{L^2} = 0$$

が成り立つということである。($\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ は L^2 内積である。)

補題 13 より、2 次変形のためには $\frac{d^2}{dt^2}F(tV_1)\Big|_{t=0}$ を計算しなければならない。これは次のように記述できる。

命題 14 ([河井 3, Proposition 3.8])**.** 命題 *11* の記号を用いる。$V \in \ker D$ に対して次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}F(tV)\bigg|_{t=0} =& ((\nabla_V \nabla * \varphi)(V))(e_1, e_2, e_3, \cdot)^\sharp \\
&+ 2\sum_{i \in \mathbb{Z}/3} \left((\nabla_V * \varphi)(\nabla^\perp_{e_i} V, e_{i+1}, e_{i+2}, \cdot)^\sharp\right)^\perp \\
&+ \sum_{i=1}^{3} e_i \times (R(V, e_i)V)^\perp + 2\sum_{i,j=1}^{3} g(V, \Pi(e_i, e_j))e_i \times \nabla^\perp_{e_j} V,
\end{aligned}$$

ここで R は (M, g) の曲率テンソルであり、Π は L の M 内における第二基本形式である。もし G_2 構造 φ が *torsion-free* か *nearly parallel* G_2 ならば以下が成立。

$$\frac{d^2}{dt^2}F(tV)\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{3} e_i \times (R(V, e_i)V)^\perp + 2\sum_{i,j=1}^{3} g(V, \Pi(e_i, e_j))e_i \times \nabla^\perp_{e_j} V.$$

5 S^7 の associative 部分多様体

この章では、前章まで述べたことの応用として、S^7 のある等質 associative 部分多様体が 2 次まで非障害的であることを示す。

まず 7 次元球面 S^7 は自然に nearly parallel G_2 多様体になることに注意する。S^7 の錘は平坦な $\mathbb{R}^8 - \{0\}$ であるためである。S^7 の associative 部分多様体の主な性質は、Lotay([Lotay]) により研究された。特に、彼は等質な associative 部分多様体を分類した。その中で、他の幾何（特殊ルジャンドルや正則曲線の引き戻しなど）からこない具体例 $A_3 \cong \mathrm{SU}(2)$ を構成した。A_3 は $\mathrm{SU}(2)$ の $\mathbb{C}^4 \cong \mathbb{R}^8$ への既約表現のある点を通る軌道になっている。他の幾何からこない具体例は、(Spin(7) 作用を除いて) これ以外に知られていない。A_3 を変形することで、そのような新しい例が作れるかどうか調べるのは興味深い問題である。

[河井 2] では、等質な associative 部分多様体の無限小変形を調べた。そして（全測地的な S^6 に含まれない）A_3 以外の等質な例に対しては、すべての無限小変形は非障害的であることを示した。

A_3 の無限小変形の空間 $\ker D$ は 34 次元である ([河井 2, Proposition 6.22])。一方、nearly parallel G_2 多様体 S^7 の自己同型群は Spin(7) でそれは A_3 の 17 次元分の変形を引き起こす ([河井 3, Lemma 4.6])。なので残り $34 - 17 = 17$ 次元分の変形は非障害的かどうかはわからない。（A_3 は他の幾何から来ない例なので、他の幾何を用いて変形の説明はできない。）そこで A_3 の 2 次変形を調べ、次の結果を得た。

定理 15 ([河井 3, Theorem 1.1])**.** *A_3 のすべての無限小変形は、2 次まで非障害的である。*

Proof. $\mathrm{SU}(2)$ 不変な線形写像 $T : S^2(\ker D) \otimes \ker D \to \mathbb{R}$ を $T(V \odot V, W) = \left\langle \frac{d^2}{dt^2} F(tV)\Big|_{t=0}, W \right\rangle_{L^2}$ と定める。nearly parallel G_2 構造 φ は、$d * \varphi = 0$ をみたすので、補題 12 より $\ker D = \mathrm{Coker} D$ である。よって補題 13 より、すべての無限小変形が 2 次まで非障害的であることと、$T \equiv 0$ となることは同値である。V_k を $\mathrm{SU}(2)$ の $(k+1)$ 次元複素既約表現とすると、[河井 2, Proposition 6.22] より $\ker D \cong V_6 \oplus V_4 \oplus V_4$ であった。このことと Clebsch-Gordan 分解を用いた計算により、$T \equiv 0$ であることが示せる。 □

注意 16. この定理は、A_3 の無限小変形が非障害的かどうか決定したわけではないので、あまり強い結果ではない。*3* 次以降の変形も調べるべきであるが、$\ker D$ の次元が 34 次元と高いので具体的な計算はかなり困難である。例えば、*(1.2)* をみると $\ker D$ の *3* 次の項が入っているので、*3* 次の変形を調べるためには $\dim S^3(\ker D) = \begin{pmatrix} 34+3-1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7140$ 次元分の量を扱わねばならない。また $V = V_1 \in \ker D$ に対して V_2 の取り方も一意ではないので、計算量は相当なものになる。おそらくまったく別のアプローチが必要であると思われる。

最近、*[FLSV]* により *associative* 部分多様体の法束に値を持つ微分形式の空間に、L_∞ 代数の構造が入ることが示された。ケーラー多様体内の部分多様体の変形に関する *[Manetti2]* や L_∞ 代数の一般論を用いて、A_3 の変形を考えることができるのかもしれない。

参考文献

[AS] B. Alexandrov and U. Semmelmann, “Deformations of nearly parallel G_2-structures”, Asian J. Math. **16** (2012), 713–744.

[Bär] C. Bär, “Real Killing spinors and holonomy”, Comm. Math. Phys. **154** (1993), 509–521.

[FG] M. Fernández and A. Gray, “Riemannian manifolds with structure group G_2”, Annali di Mat. Pura Appl. 32 (1982), 19–45.

[FLSV] D. Fiorenza, H. V. Lê, L. Schwachhöfer and L.Vitagliano, “Strongly homotopy Lie algebras and deformations of calibrated submanifolds”, arXiv:/1804.05732.

[Foscolo] L. Foscolo, “Deformation theory of nearly Kähler manifolds”, J. Lond. Math. Soc. (2) **95** (2017), 586–612.

[Gayet] D. Gayet, “Smooth moduli spaces of associative submanifolds”, Q. J. Math. **65** (2014), 1213–1240.

[後藤] R. Goto, “Moduli spaces of topological calibrations, Calabi-Yau, HyperKähler, G_2 and Spin(7) structures”, Internat. J. Math. **15** (2004), 211–257.

[IM] D. Iacono and M. Manetti, “An algebraic proof of Bogomolov-Tian-Todorov theorem”, In Deformation Spaces vol.39, Vieweg Verlag (2010), 113–133.

[Joyce] D.D. Joyce, “Compact Manifolds with Special Holonomy”, Oxford University Press, 2000.

[河井 1] K. Kawai, “Stabilities of affine Legendrian submanifolds and their moduli spaces”, Differential Geom. Appl. **47** (2016), 159–189.

[河井 2] K. Kawai, “Deformations of homogeneous associative submanifolds in nearly parallel G_2-manifolds”, Asian J. Math. **21** (2017), 429–462.

[河井 3] K. Kawai, “Second-order deformations of associative submanifolds in nearly parallel G_2-manifolds”, Q. J. Math. **69** (2018), 241–270.

[小磯] N. Koiso, “Rigidity and infinitesimal deformability of Einstein metrics”, Osaka J. Math. **19** (1982), 643–668.

[Lotay] J. D. Lotay, “Associative Submanifolds of the 7-Sphere”, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **105** (2012), 1183–1214.

[Manetti1] M. Manetti, “Lectures on deformations of complex manifolds (deformations fromdifferential graded viewpoint)”, Rend. Mat. Appl. (7) **24** (2004), 1–183.

[Manetti2] M. Manetti, “Lie description of higher obstructions to deforming submanifolds”, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 6 (2007), 631–659.

[Mclean] R. C. McLean, “Deformations of Calibrated Submanifolds”, Comm. Anal. Geom. **6** (1998), 705–747.

[森山] T. Moriyama, “Deformations of special Legendrian submanifolds in Sasaki-Einstein manifolds”, Math. Z. **283** (2016), 1111–1147.

[向井] M. Mukai, “The deformation of harmonic maps given by the Clifford tori”, Kodai Math. J. **20** (1997), 252–268.

[Papayanov] G. Papayanov, “Goto’s deformation theory of geometric structures, a Lie-theoretical description”, arXiv:/1607.07509.

[Tian] G. Tian, “Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric”, Mathematical Aspects of String Theory (San Diego, 1986), Adv. Ser. Math. Phys. 1, World Sci. Publishing, Singapore, (1987), 629–646.

[Todorov] A.N. Todorov, “The Weil-Petersson geometry of the moduli space of SU($n \geq 3$) (Calabi-Yau) Manifolds I”, Commun. Math. Phys. **126** (l989), 325–346.