

対称空間のグラスマン幾何的曲面論

内藤博夫 (部分多様体幾何とリー群作用 2018 9月3日)

概要 「グラスマン幾何」は、接空間に対して与えられた制約条件下で、部分多様体を考察するという部分多様体論で、局所的には、準線形一階偏微分方程式系の解の研究に繋がっている。このような考え方が既にあったことは容易に想像されるが、「グラスマン幾何」というネーミングは、R. Harvey-B. Lawson [1] の論文 “Calibrated geometries” (1980) の中で初めて使われたようである。グラスマン幾何の枠組みの代表的な活用例として上記のキャリブレーションの幾何学や J. M. Landsberg [2] による一階偏微分方程式系によって定義される $\mathbb{R}^n$ の極小部分多様体の枠組み研究が知られているが、ここではリーマン等質空間の等質部分多様体の枠組み研究にグラスマン幾何を活用することを目指す。等質部分多様体の分類理論では、B. Dynkin [3] による複素半単純リー代数の複素半単純リー部分代数の分類理論 (1952) から、コンパクト半単純リー群の閉リー部分群の局所的分類が得られている。この延長線上に、等質リーマン多様体の等質部分多様体の分類問題がある。これに関連して、これまで、定曲率空間や階数 1 リーマン対称空間など個別の等質リーマン多様体に対して、その等質部分多様体の分類問題が研究されてきた。等質部分多様体の分類問題は、グラスマン幾何の枠組みを通してうまく定式化（軌道型グラスマン幾何の導入 [17]）することができ、等質部分多様体を形式的に類別することができる。類別された形式的な部分多様体の族は、個々それぞれに、O-幾何と呼ばれ、O-幾何における最初の問題は、(1) 与えられたO-幾何に真に部分多様体が存在するか否かを判別することである。これは付随する準線形偏微分方程式系の解の存在・非存在を明らかにすることに他ならない。その後、次の段階として、(2) 実質的なO-幾何に典型的な部分多様体（例えば、極小部分多様体や等質部分多様体など）が存在するかを考察することが課題になる。これは、言わば、上記の解の性質を調べることに他ならない。特に、等質部分多様体の存在問題が解明できれば、等質リーマン多様体における等質部分多様体の存在状況あるいは分布状況を把握できるのではないかと考えた。このような考えに立って、これまで 3 次元リーマン等質空間、特に左不変計量を持つ 3 次元リー群の曲面論を上記 (1), (2) の観点から考察してきた。このような空間は J. Milnor [13] 等によって様々な具体的計算ができるリーマン等質空間として知られている。この講演では、このような空間に対するこれまでの知見に立って、リーマン対称空間の（特に曲面に関する）O-幾何について得られた現状と今後の課題について報告したい。

§.1 軌道型グラスマン幾何と等質部分多様体

初めにグラスマン幾何の枠組みについて説明する. M を滑らかな m 次元多様体, s を $1 \leq s \leq m-1$ を満たす自然数とし, $Gr^s(TM)$ を M 上のグラスマン束とする. 各点 $p \in M$ に対して, そのファイバー $Gr^s(T_p M)$ は点 p の接空間 $T_p M$ の s 次元線形部分空間全体のなすグラスマン多様体である. グラスマン束 $Gr^s(TM)$ の部分集合 Σ を固定する. M の s 次元連結部分多様体 S が Σ -**部分多様体**であるとは, S の接空間 $T_p S, p \in S$, がすべて Σ に属するときいい, そのような Σ -部分多様体の族を Σ -**幾何**という. **グラスマン幾何**は, このような Σ -幾何の総称である.

この解説では, リーマン等質空間の等質部分多様体をモデルとするグラスマン幾何の枠組みを考える. M を連結等質リーマン多様体とし, その等長変換群の単位元連結成分 G をグラスマン束 $Gr^s(TM)$ に等長変換の微分を通して作用させる. この作用の G -軌道 $\mathcal{O} \subset Gr^s(TM)$ を1つ固定する. G は M に推移的に作用するから, $\mathcal{O}$ は M 上の等質束となる. $\Sigma = \mathcal{O}$ とするときのグラスマン幾何を $\mathcal{O}$ -幾何といい, M の (s 次元) Σ -部分多様体を $\mathcal{O}$ -部分多様体という. また, このようなグラスマン幾何を**軌道型グラスマン幾何**という. M の連結部分多様体 S が**等質部分多様体**であるとは, S の任意の2点 p, q に対して, $g(S) = S, g(p) = q$ となる $g \in G$ が存在するときに言い, そのとき M の任意の連結等質部分多様体は, $\exists$ 軌道 $\mathcal{O}$ に対する $\mathcal{O}$ -部分多様体になる. 概要で述べたように, 軌道型グラスマン幾何の基本的な課題は, (1) $\mathcal{O}$ -部分多様体が存在する軌道 $\mathcal{O}$ の決定, 次に, (2) このような $\mathcal{O}$ -幾何に対する部分多様体論の構築である.

特に, 等質 $\mathcal{O}$ -部分多様体を許容する軌道 $\mathcal{O}$ の決定は, 軌道空間におけるそのような軌道の分布状況を知ることになり, 等質部分多様体の分類に対する最初のアプローチと考えられる.

リーマン対称空間の**等質部分多様体の分類問題**への最初のアプローチは, Dynkin [3] (1959) から得られる単連結コンパクト半単純リー群 (これは両側不変計量によってリーマン対称空間になる) の閉リー部分群 (全測地的等質部分多様体) の分類と考えられる. その後, D.S.P. Leung [4] [5] によるリーマン対称空間の鏡映部分多様体の分類理論 (1979) と考えられる. これはリーマン対称空間の対合の固定点集合を分類するもので, そのような集合は特別な全測地的等質部分多様体になる. この分類は, また, M. Berger [6] による半単純アフィン対称空間の分類理論 (1957) と密接に関連している. また, これらに関連する最近の結果として, 井川 [7] による対称三対と Hermann 作用の研究がある. そのほか, 複素射影空間の等質ケーラー部分多様体の分類 (高木-竹内 [8]) など個別のリーマン対称空間における等質部分多様体の分類や平行部分多様体や対称部分多様体 ([22],[12]) など適切な条件下での等質部分多様体の分類が知られている.

§.2 対称空間の $\mathcal{O}$ -部分多様体と包含的局所線形分布

M を単連結リーマン対称空間, $o \in M$ とし, 等長変換群の単位元連結成分 G の等質空間 G/K として表す. K は基点 o の連結なイソトロピー部分群である. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の標準分解とし, 接空間 $T_o M$ を線形空間 $\mathfrak{p}$ と同一視する. また, K の $T_o M$ への微分作用を $\mathfrak{p}$ への随伴作用 $\text{Ad}(K)|_{\mathfrak{p}}$ で表す.

$1 \leq s \leq m = \dim M$ を固定して, M の s 次元連結部分多様体 S に関する $\mathcal{O}$ -幾何を考える. M は G -等質空間だから, 軌道 $\mathcal{O}$ 全体がなす G -軌道空間 $G \setminus Gr^s(TM)$ は, s 次元接空間の基点 o への等長移動によって $K \setminus Gr^s(\mathfrak{p})$ と同一視される. 今後, $K \setminus Gr^s(\mathfrak{p})$ を $G \setminus Gr^s(TM)$ の**パラメータ空間**と考える.

以下, $\mathcal{O} \in G \setminus Gr^s(TM)$ を固定し, M の $\mathcal{O}$ -部分多様体の存在問題 (軌道型グラスマン幾何の基本的問題 (1)) を考える. そのために, $\mathcal{D} \in \mathcal{O}$ となる M 上の**局所線形分布** $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ を構成し, $\mathcal{D}$ が包含的であることを示せば, その**積分多様体は $\mathcal{O}$ -部分多様体**になる. 逆に, $\mathcal{O}$ -部分多様体 S が与えられれば, M がリーマン等質空間だから, S の任意の点 p の周りに S と局所合同となるリーフを持つ局所葉層構造 $\mathcal{F}$ を定めることができる. $\mathcal{F}$ の接空間からなる局所線形分布 $\mathcal{D}'$ は包含的となる. 従って, 先ず, 基点 o の周りに, $\mathcal{D} \in \mathcal{O}$ となる局所線形分布 $\mathcal{D}$ を構成する.

$M \ni p$ に対して, $\mathcal{O}_p = \mathcal{O} \cap Gr^s(T_p M)$ とおく. 基点 o から周りの点 p への測地線に沿った平行移動を P_{op} とする. M はリーマン対称空間だから, P_{op} はある**等長変換の微分**として実現されることに注意する. 従って, $P_{op}(\mathcal{O}_o) = \mathcal{O}_p$ である. 軌道 $\mathcal{O}$ のパラメータを $Q = \mathcal{O}_o \in K \setminus Gr^s(\mathfrak{p})$ とおくと, $\mathcal{D} \in \mathcal{O}$ となる基点 o の周りの s 次元局所線形分布 $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_p\}$ に対して, 局所写像 $Q^{\mathcal{D}}: M \ni p \rightarrow (T_{op})^{-1}(\mathcal{D}_p) \in Q$ が定まる. Q は K -軌道だから, $V_o = \mathcal{D}_o \in Q$ と置くと, $\Theta(o) = 0$ を満たす基点 o の周りの局所関数 $\Theta: M \rightarrow \mathfrak{k}$ が存在して, o の周りの点 p に対して $Q^{\mathcal{D}}(p) = \text{Ad}(\exp \Theta(p))(V_o)$ を満たす.

以下, 基準部分空間 $V_o \in Q \subset Gr^s(\mathfrak{p})$ を任意に1つ固定し, o の周りの $\Theta(o) = 0$ を満たす局所関数 $\Theta: M \rightarrow \mathfrak{k}$ に対して, 局所線形分布 $\mathcal{D}^{\Theta} = \{\mathcal{D}_p^{\Theta}\}$ を $\mathcal{D}_p^{\Theta} = P_{op}(\text{Ad}(\exp \Theta(p))V_o)$ と定める. つぎに $\{e_1, \dots, e_s\}$ を V_o の基底とし, これに付け加えて $\mathfrak{p}$ の基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$ を取り, さらに M 上の局所ベクトル場 E_i, X_i^{Θ} ($1 \leq i \leq m$) を $(E_i)_p = P_{op}(e_i)$, $(X_i^{\Theta})_p = P_{op}(\text{Ad}(\exp \Theta(p))e_i)$ とおく. このとき, ベクトル場 $\{X_1^{\Theta}, \dots, X_s^{\Theta}\}$ は, 線形分布 $\mathcal{D}^{\Theta}$ の基底をなす. このとき局所線形分布 $\mathcal{D}$ が包含的であるための条件を, 未知関数 $\Theta: M \rightarrow \mathfrak{k}$ に関する**準線形1階偏微分方程式系**で記述することを考える.

§.3 包含的線形分布と1階準線形偏微分方程式系

まず, 未知関数 Θ とは無関係に, 一般の M 上の s 次元線形分布 D が包含的になるための条件について考える.

補題. D を M 上の基点 o の周りの s 次元線形分布, $\{X_1, \dots, X_s\}$ を D の基底とする. このとき D が包含的, i.e., $[D, D] \subset D$ であるための必要十分条件は $X_1 \wedge \dots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = 0$ ($1 \leq i, j \leq s$) である.

$\{E_1, \dots, E_m\}$ を M 上の基底場とし, $X_i = \sum_{j=1}^m a_i^j E_j$ ($1 \leq i \leq s$), $[E_i, E_j] = \sum_{k=1}^m c_{ij}^k E_k$ ($1 \leq i, j \leq m$) と置く. このとき $X_1 \wedge \dots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = \sum a_1^{j_1} \dots a_s^{j_s} E_{j_1} \wedge \dots \wedge E_{j_s} \wedge [X_i, X_j]$. さらに $[X_i, X_j] = [\sum_k a_i^k E_k, \sum_\ell a_j^\ell E_\ell] = \sum a_i^k a_j^\ell c_{k\ell}^h E_h + \sum a_i^k (E_k a_j^\ell) E_\ell - \sum a_j^\ell (E_\ell a_i^k) E_k$ より

$$X_1 \wedge \dots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = \sum a_1^{j_1} \dots a_s^{j_s} a_{ij}^h E_{j_1} \wedge \dots \wedge E_{j_s} \wedge E_h.$$

ここで $a_{ij}^h = \sum a_i^k a_j^\ell c_{k\ell}^h + a_i^k (E_k a_j^\ell) - a_j^\ell (E_\ell a_i^k)$ であり, 各 $\{i, j\}$ ごとに $a_{ij}^h = a_{s+1}^h$ と見なせば, $X_1 \wedge \dots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = \sum a_1^{j_1} \dots a_s^{j_s} a_{s+1}^{j_{s+1}} E_{j_1} \wedge \dots \wedge E_{j_s} \wedge E_{j_{s+1}}$ と書ける. ここで $(s+1) \times m$ 行列 $A^{(ij)}$ を $A^{(ij)} = (a_k^\ell)$ と置けば

$$X_1 \wedge \dots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = \sum_{1 \leq h_1 < \dots < h_{s+1} \leq m} \det(a_k^{h_\ell})_{k=1, \dots, s+1}^{\ell=1, \dots, s+1} E_{h_1} \wedge \dots \wedge E_{h_{s+1}}.$$

従って $X_1 \wedge \dots \wedge X_s \wedge [X_i, X_j] = 0$ は $\text{rank } A^{(ij)} \leq s$ を意味し, $X_1, \dots, X_s$ は1次独立だから $\text{rank } A^{(ij)} = s$ が従う. 従って, 次の補題が成り立つ.

補題. 線形分布 D が包含的である必要十分条件は, $\text{rank } A^{(i,j)} = s$ である.

つぎに基底場 $\{E_1, \dots, E_m\}$ の取り方を基点 o において

$$(X_k)_o = (E_k)_o \quad (1 \leq k \leq s), \quad \text{i.e.,} \quad a_k^h(o) = \delta_k^h \quad (1 \leq k \leq s, 1 \leq h \leq m)$$

を満たすように取る. このとき $A^{(i,j)}(o)$ の第1～ s 列は1次独立となるので, 基点 o の周りで $A^{(i,j)}$ の第1～ s 列は1次独立としてよい. よって, $A^{(i,j)} = (\mathbf{a}^1 \dots \mathbf{a}^m)$ と列ベクトルで表示すれば $s+1 \leq h \leq m$ に対して $\mathbf{a}^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h \mathbf{a}^r$ を満たす o の周りの関数 λ_r^h ($1 \leq r \leq s, s+1 \leq h \leq m$) が存在する. 従って次の関係式が成立する.

命題. $1 \leq i, j \leq s, s+1 \leq h \leq m$ に対して

$$(1) \quad a_\ell^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h a_\ell^r \quad (1 \leq \ell \leq s) \quad \text{及び}$$

$$(2) \quad a_{s+1}^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h a_{s+1}^r, \quad \text{i.e.,}$$

$$\sum_{k,\ell=1}^m \{c_{k\ell}^h a_i^k a_j^\ell + a_i^k (E_k a_j^\ell) - \sum a_j^\ell (E_\ell a_i^k)\} = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h \left[\sum_{k,\ell=1}^m \{c_{k\ell}^r a_i^k a_j^\ell + a_i^k (E_k a_j^\ell) - a_j^\ell (E_\ell a_i^k)\} \right]$$

(1) を (2) に代入して整理すれば次の命題が成り立つ. $1 \leq p, \ell \leq s, s+1 \leq h \leq m$, $1 \leq a \leq m$ に対して

$$\alpha_{p\ell}^a(c, \lambda) = c_{p\ell}^a + \sum_{s+1 \leq k \leq m} (c_{k\ell}^a \lambda_p^k - c_{kp}^a \lambda_\ell^k) + (1/2) \sum_{s+1 \leq k, t \leq m} c_{kt}^a (\lambda_p^k \lambda_\ell^t - \lambda_p^t \lambda_\ell^k)$$

$$\begin{aligned} \beta_{p\ell}^h(c, \lambda, E\lambda) = & \alpha_{p\ell}^h(c, \lambda) + (E_p \lambda_\ell^h) - (E_\ell \lambda_p^h) \\ & + \sum_{s+1 \leq k \leq m} \lambda_p^k (E_k \lambda_\ell^h) - \sum_{s+1 \leq k \leq m} \lambda_\ell^k (E_k \lambda_p^h) - \sum_{r=1}^s \lambda_r^h \alpha_{p\ell}^r(c, \lambda) \end{aligned}$$

と置く. このとき $\alpha_{p\ell}^a(c, \lambda) + \alpha_{\ell p}^a(c, \lambda) = 0$, さらに $\beta_{p\ell}^h(c, \lambda, E\lambda) + \beta_{\ell p}^h(c, \lambda, E\lambda) = 0$ が成り立つ. ここで $\alpha_{**}^*(c, \lambda)$, $\beta_{**}^*(c, \lambda, E\lambda)$ はそれぞれ c_{**}^* , λ_{**}^* , $E_{**}\lambda_{**}^*$ に依存することを表す. また s 次歪対称行列 $\beta^h(c, \lambda, E\lambda)$, s 次正方行列 A を $\beta^h(c, \lambda, E\lambda) = (\beta_{p\ell}^h(c, \lambda, E\lambda))$, $A = (a_i^p)$ と置く. このとき

命題. $1 \leq i, j \leq s, s+1 \leq h \leq m$ に対して $\sum_{p, \ell=1}^s \beta_{p\ell}^h(c, \lambda, E\lambda) a_i^p a_j^\ell = 0$, i.e., $A \beta^h {}^t A = 0$ が成り立つ. さらに, $A(o)$ が単位行列だから, 基点 $o \in M$ の近傍で $\beta^h = 0$ が成り立つ.

さらに $1 \leq a \leq m$ に対して m 次歪対称行列 C^a とその分割, $s \times (m-s)$ 行列 λ , $m \times s$ 行列 $(E\lambda)^a$ とその分割を

$$\begin{aligned} C^a = (c_{ij}^a) = & \left(\begin{array}{c|c} C_{11}^a & C_{12}^a \\ \hline C_{21}^a & C_{22}^a \end{array} \right); \quad \begin{array}{ll} C_{11}^a : s \text{ 次正方行列,} & C_{12}^a : s \times (m-s) \text{ 行列,} \\ C_{21}^a : (m-s) \times s \text{ 行列} & C_{22}^a : (m-s) \text{ 次正方行列,} \end{array} \\ \lambda = (\lambda_p^k), \quad (E\lambda)^a = (E_b \lambda_p^a) = & \left(\begin{array}{c} (E' \lambda)^a \\ (E'' \lambda)^a \end{array} \right); \quad \begin{array}{ll} (E' \lambda)^a : s \text{ 次正方行列,} \\ (E'' \lambda)^a : (m-s) \times s \text{ 行列} \end{array} \end{aligned}$$

と置く. また s 次正方行列 $\gamma^h(c, \lambda, E\lambda)$ を

$$\begin{aligned} \gamma^h(c, \lambda, E\lambda) = & (1/2) C_{11}^h + \lambda C_{21}^h + \lambda C_{22}^h {}^t \lambda + (E' \lambda)^h + \lambda (E'' \lambda)^h \\ & - (1/2) \sum_{r=1}^s \lambda_r^h C_{11}^r - \lambda \sum_{r=1}^s \lambda_r^h C_{21}^r + (1/2) \lambda (\sum_{r=1}^s \lambda_r^h C_{22}^r) {}^t \lambda \\ & + \sum_{r=1}^s \lambda_r^h (E' \lambda)^r + \lambda \sum_{r=1}^s \lambda_r^h (E'' \lambda)^r \end{aligned}$$

と置く. このとき $\beta_{**}^h(c, \lambda, E\lambda)$ に $\alpha_{**}^a(c, \lambda)$ を代入して整理すれば

$\beta^h(c, \lambda, E\lambda) = \gamma^h(c, \lambda, E\lambda) - {}^t(\gamma^h(c, \lambda, E\lambda))$ を得る. 従って 基点 $o \in M$ の近傍で $\gamma^h(c, \lambda, E\lambda)$ は s 次対称行列になる. 以上を纏めると

定理. s 次対称行列 $\gamma^h(c, \lambda, E\lambda)$ は, $s(m-s)$ 個の未知関数 $\lambda = (\lambda_p^h)$ に関する $(m-s) \times s(s-1)/2$ 個の準線形 1 階偏微分方程式系と見なせる. このとき, この方程式系の基点 o の周りの局所解 λ と局所 s 次正則行列 $A = (a_i^p)$ に対して

$$\begin{aligned} a_\ell^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h a_\ell^r \quad (1 \leq \ell \leq s, s+1 \leq h \leq m), \quad X_\ell = \sum_{a=1}^m a_\ell^a E_a \quad (1 \leq \ell \leq s), \\ \mathcal{D} : p \rightarrow \mathcal{D}_p = \langle (X_1)_p, \dots, (X_s)_p \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

と置けば、 $\mathcal{D}$ は o の周りの包含的 s 次元局所線形分布になる．逆に o の周りの包含的 s 次元局所線形分布はこのようにして構成できる．

注意. 未知関数 $\lambda = (\lambda_p^h)$ の個数 $s(m-s)$ はグラスマン多様体 $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の次元に等しい．

§.4 グラスマン多様体の局所座標と $\mathcal{O}$ -軌道の表現

最初にグラスマン多様体の標準的な局所座標を定義する． p の (線形) 基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$ を固定する． $Gr^s(p) \ni V$ に対して V の基底 $\{v_1, \dots, v_s\}$ をとり、 $(v_1, \dots, v_s) = (e_1, \dots, e_m)P$ とおく．ここで $m \times s$ 行列 P を $P = (p_1, \dots, p_s)$ と表せば、列ベクトル $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{R}^m$ は 1 次独立となる．今、 $\hat{V} = \langle p_1, \dots, p_s \rangle_{\mathbb{R}} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ とおく．このとき、 $\iota: Gr^s(p) \in V \rightarrow \hat{V} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ は V の基底の取り方によらず定義可能になる．今、 s -ベクトルの空間 $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)$ を $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m) = \{F = (f_1, \dots, f_s) \mid f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}^m \text{ は 1 次独立} \}$ とし、 $F, F' \in \mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)$ に対して $\exists g \in GL(s, \mathbb{R})$ が存在して $F' = Fg$ となると、 $F \sim F'$ は同値と記し、その同値類を $[F]$ で表す．このとき写像 $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)/\sim \ni [F] \rightarrow V = \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathbb{R}} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ によって $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ は $\mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m)/\sim$ と同一視される．

今、 $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq m$ となる組 $(i_1, \dots, i_s)$ に対して、 $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の開集合 $U^{(i_1, \dots, i_s)}$ を $U^{(i_1, \dots, i_s)} = \{F = (f_1, \dots, f_s) \in \mathcal{F}^s(\mathbb{R}^m) \mid ({}^tF)_{(i_1, \dots, i_s)} \text{ が正則行列} \}$ 、写像 $\varphi^{(i_1, \dots, i_s)}: U^{(i_1, \dots, i_s)} \rightarrow M(s, m-s; \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{s(m-s)}$ を $\varphi^{(i_1, \dots, i_s)}(F) = [({}^tF)_{(i_1, \dots, i_s)}]^{-1}({}^tF)_{\overline{(i_1, \dots, i_s)}}$ とおく．ここで、 $({}^tF)_{(i_1, \dots, i_s)}$ は $({}^tF)$ の第 $i_1, \dots, i_s$ 列の作る s 次小行列、 $({}^tF)_{\overline{(i_1, \dots, i_s)}}$ は $({}^tF)$ から第 $i_1, \dots, i_s$ 列を取り除いてできる $s \times (m-s)$ 小行列とする．このとき、組 $(U^{(i_1, \dots, i_s)}, \varphi^{(i_1, \dots, i_s)})$ はグラスマン多様体 $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の局所座標を与える．特に $s=1$ の場合、 $Gr^1(\mathbb{R}^m)$ は $(m-1)$ 次元実射影空間となり、 $(U^{(i)}, \varphi^{(i)})$ は斉次座標から定まる実射影空間の良く知られた座標である．

次に未知関数 $\lambda = (\lambda_p^h)$ の幾何学的意味について考える．さて、 s 次元線形分布 $\mathcal{D}$ の場合に話を戻そう．まず、 λ_r^h ($1 \leq r \leq s, s+1 \leq h \leq m$) の定義を思い出す． $\{X_1, \dots, X_s\}$ を $\mathcal{D}$ の基底とし、 $(X_1, \dots, X_s) = (E_1, \dots, E_m)A$ と置き、さらに $({}^tA) = (\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^m)$ と列ベクトル表示する．ここで $({}^tA)_{(1,2,\dots,s)}$ は正則として良かった．このとき $\mathbf{a}^h = \sum_{r=1}^s \lambda_r^h \mathbf{a}^r$ 、i.e., $(\mathbf{a}^{s+1}, \dots, \mathbf{a}^m) = (\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^s)(\lambda_r^h)$ 、i.e., $({}^tA)_{\overline{(1,2,\dots,s)}} = ({}^tA)_{(1,2,\dots,s)}(\lambda_r^h)$ ．従って、 $A \in U^{(1,2,\dots,s)}$ で、 $(\lambda_r^h) = (({}^tA)_{(1,2,\dots,s)})^{-1}({}^tA)_{\overline{(1,2,\dots,s)}} = \varphi^{(1,2,\dots,s)}(A)$ となる．従って $(\lambda_r^h) \in \mathbb{R}^{s(m-s)}$ は $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の斉次座標である．

注意. s 次元線形分布 $\mathcal{D}$ の基底 $\{X_1, \dots, X_s\}$ を別の基底 $\{X'_1, \dots, X'_s\}$ に取り換えたとき、それぞれ対応する λ, λ' は変わらない、i.e., $\lambda_p^h = (\lambda')_p^h$ ．これは、局所座標 λ が $\mathcal{D}$ だけに依存していることに他ならない．実際、基底 $\{E_1, \dots, E_m\}$ を固定するとき、各点 p において

$\langle (X_1)_p, \dots, (X_s)_p \rangle_{\mathbb{R}} = \langle (X'_1)_p, \dots, (X'_s)_p \rangle_{\mathbb{R}}$ だから, $(X'_1, \dots, X'_s) = (X_1, \dots, X_s) {}^tP$ となる s 次正則行列 P がとれる. $m \times s$ 行列 A, A' を $(X_1, \dots, X_s) = (E_1, \dots, E_m)A$, $(X'_1, \dots, X'_s) = (E_1, \dots, E_m)A'$ と置けば, このとき $A' = A {}^tP$. 従って $[A'] = [A]$, i.e., $\lambda' = \varphi^{(1, \dots, s)}(A') = \varphi^{(1, \dots, s)}(A) = \lambda$ となる.

次に, $Gr^s(\mathfrak{p}) \ni V_0$ とし, V_0 の **Ad(K)-軌道** $\text{Ad}(K)V_0$ の V_0 の周りの**局所表現**を $Gr^s(\mathfrak{p}) \cong Gr^s(\mathbb{R}^m)$ の**局所座標** $(U^{(1, \dots, s)}, \varphi^{(1, \dots, s)})$ を通して表す. 今までのように, $V_o = \langle e_1, \dots, e_s \rangle_{\mathbb{R}}$ となる $\mathfrak{p}$ の正規直交基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$ をとり, $\iota : Gr^s(\mathfrak{p}) \ni V \rightarrow \hat{V} \in Gr^s(\mathbb{R}^m)$ によって $Gr^s(\mathfrak{p})$ を $Gr^s(\mathbb{R}^m)$ と同一視する. $k \in K$ に対して, $\text{Ad}(k)e_j = \sum_{i=1}^m O_i^j(k)e_i$, i.e., $O(k) = (O_i^j(k))$ と置き $(\text{Ad}(k)e_1, \dots, \text{Ad}(k)e_m) = (e_1, \dots, e_m)O(k)$ と表す. このとき $\rho : K \ni k \rightarrow O(k) \in SO(m)$ は忠実表現, i.e., $\rho : K \cong O(K)$ である.

さらに, $O(k) = (O_1(k), \dots, O_m(k))$ と列ベクトルで表示し $V = \text{Ad}(k)V_o$ と置く. このとき $V = \langle \text{Ad}(k)e_1, \dots, \text{Ad}(k)e_s \rangle_{\mathbb{R}}$ だから $\hat{V} = \langle O_1(k), \dots, O_s(k) \rangle_{\mathbb{R}}$ となる. 特に, $k = \epsilon$ を K の単位元, E_m を m 次単位行列, $E_m = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ とすれば, $O(\epsilon) = E_m$ で $\hat{V}_o = \langle O_1(\epsilon), \dots, O_s(\epsilon) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \rangle_{\mathbb{R}}$ となる. 次に, $F(k) = (O_1(k), \dots, O_s(k))$ と置く. $F(k)$ は $m \times s$ 行列である. このとき $\varphi^{(1, \dots, s)}(F(k)) = \lambda(F(k)) = \lambda(k)$ と記す. このとき軌道 $\text{Ad}(K)V_0$ は V_0 の周りで次のように表される.

命題. $\varphi^{(1, \dots, s)}(\text{Ad}(K)V_0 \cap U^{(1, \dots, s)}) = \{\lambda(k) \in M(s, m-s; \mathbb{R}) \mid k \in K : ({}^tF(k))_{(1, \dots, s)} \text{ 正則} \}$. 特に $\varphi^{(1, \dots, s)}(V_o) = \lambda(\epsilon) = 0 \in M(s, m-s; \mathbb{R})$ である.

つぎに, K のリー代数 $\mathfrak{k}$ の基底を $\{t_1, \dots, t_\ell\}$ とし, $\text{ad}(t_\alpha)e_j = \sum_{i=1}^m (t_\alpha)_j^i e_i$ ($1 \leq \alpha \leq \ell$, $1 \leq j \leq m$), i.e., $T_\alpha = ((t_\alpha)_j^i)$ と置けば $(\text{ad}(t_\alpha)e_1, \dots, \text{ad}(t_\alpha)e_m) = (e_1, \dots, e_m)T_\alpha$ と表せる. T_α は m 次歪対称行列である. また, $\{y^1, \dots, y^\ell\}$ を基底 $\{t_1, \dots, t_\ell\}$ に付随する座標関数とし, $\mathfrak{k} \ni y$ を $y = \sum_{\alpha=1}^\ell y^\alpha t_\alpha$ と表す. このとき $\text{ad}(y)$ の表現行列は $\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha$ で $\text{Ad}(\exp y) = e^{\text{ad}(y)}$ だから, $\text{Ad}(\exp y)$ の表現行列は $e^{\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha}$ となる. 従って $O(\exp y) = e^{\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha}$ となる.

さらに m 次正方行列 $E_{[s,0]}, E_{[0,m-s]}$ を $E_{[s,0]} = \begin{bmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{[0,m-s]} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{m-s} \end{bmatrix}$, $\Pi : M(m; \mathbb{R}) \ni X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \rightarrow X_{12} \in M(s, m-s; \mathbb{R})$ とし $\lambda(y) = \lambda(e^{\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha})$ と置けば

$$\begin{aligned} \lambda(y) &= \Pi([E_{[s,0]} \cdot {}^t(e^{\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha} \cdot E_{[s,0]}) + E_{[0,m-s]}]^{-1} \cdot {}^t(e^{\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha} \cdot E_{[s,0]})) \\ &= \Pi([E_{[s,0]} \cdot (e^{-\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha}) + E_{[0,m-s]}]^{-1} \cdot E_{[s,0]} \cdot (e^{-\sum_{1 \leq \alpha \leq \ell} y^\alpha T_\alpha})) \end{aligned}$$

と表される. 特に $\lambda(0) = 0$ で $(\lambda_*)_0(\partial/\partial y^\alpha) \cong -(\text{ad}(t_\alpha)|_{V_0})^{V_0^\perp}$. 従って $\text{Ker}(\lambda_*)_0 = \mathfrak{k}_{V_0}$ と置けば $T_{V_0}(\text{Ad}(K)V_0) \cong \mathfrak{k}/\mathfrak{k}_{V_0}$ となる.

§.5 グラスマン幾何的曲面

今から $s = 2$ の場合を考える．このとき準線形 1 階偏微分方程式系の個数は $m - 2$, 未知関数 $\lambda = (\lambda_p^h)$ の個数は $2(m - 2)$ で, このとき偏微分方程式系は次のように整理できる．

$$(*) \quad \sum_{i=1}^m \{ \lambda_1^i E_i(\lambda_2^h) - \lambda_2^i E_i(\lambda_1^h) \} + \sum_{i,j=1}^m u_{ij}^h(c, \lambda) \lambda_1^i \lambda_2^j + v^h(c, \lambda) = 0 \quad (3 \leq h \leq m).$$

$$\text{ここで} \quad u_{ij}^h(c, \lambda) = c_{ij}^h - \lambda_1^h c_{ij}^1 - \lambda_2^h c_{ij}^2 \quad (1 \leq i, j \leq m), \quad \lambda_i^j = \delta_i^j \quad (i, j = 1, 2)$$

$$v^h(c, \lambda) = \lambda_1^h \sum_{3 \leq j \leq m} c_{1j}^1 \lambda_2^j + \lambda_2^h \sum_{3 \leq i \leq m} c_{i2}^2 \lambda_1^i$$

と置く．さらに基点 $o \in M$ の周りの局所座標 $x = (x^1, \dots, x^m)$ ($x(o) = 0$) をとり, 未知関数 $\lambda = (\lambda_p^h)$ を x の関数と見なす． $\lambda_i = (\lambda_i^h)_{h=3}^m$ ($i = 1, 2$) とベクトル表示し, $A^j(x, \lambda_2)$ ($1 \leq j \leq m$), $B(x, \lambda_1, \lambda_2) = (B^h(x, \lambda_1, \lambda_2))_{h=3}^m$ を

$$A^j(x, \lambda_2) = \sum_{i=1}^m \lambda_2^i(x) (E_i x^j),$$

$$B^h(x, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i,j=1}^m \lambda_1^i(x) (E_i x^j) \frac{\partial \lambda_2^h}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^m u_{ij}^h(c, \lambda)(x) \lambda_1^i(x) \lambda_2^j(x) + v^h(c, \lambda)(x)$$

と置く．このとき, 方程式 (*) は

$$\sum_{j=1}^m A^j(x, \lambda_2) \frac{\partial \lambda_1}{\partial x^j} - B(x, \lambda_1, \lambda_2) = 0$$

とベクトル方程式で表せる． $\lambda_2 = \lambda_2(x)$ を任意関数とし λ_1 を解ベクトルとすれば, このタイプの方程式は, **主部の等しい準線形 1 階偏微分方程式系**なので 1 変数単独準線形 1 階偏微分方程式と同じように扱える．

ベクトル方程式 (*) の解 $\lambda_1(x)$ の存在条件は

$$A(x, \lambda_2) = (A^1(x, \lambda_2), \dots, A^m(x, \lambda_2)) \neq 0$$

である．実際, すべての $1 \leq j \leq m$ に対して $A^j(x, \lambda_2) = 0$ と仮定すれば, $\sum_{i=1}^m \lambda_2^i(x) (E_i x^j) = 0$, i.e., $(\sum_{i=1}^m \lambda_2^i(x) E_i) x^j = 0$. よって $\sum_{i=1}^m \lambda_2^i E_i = 0$. $\{E_1, \dots, E_m\}$ は基底だから $\lambda_2^i = 0$ ($1 \leq i \leq m$). これは $\lambda_2^2 = 1$ に矛盾する．従って, $A(x, \lambda_2) \neq 0$ のとき常に解 $\lambda_1(x)$ が存在する．

また, ベクトル方程式 (*) は**初期値に関する解の一意性**を満たす．実際, $s = (s_1, \dots, s_{m-1})$ をパラメータとし, M の基点 o を含む超曲面 (**初期曲面**) $\Gamma : x = \gamma(s) = (\gamma_1(s), \dots, \gamma_m(s))$, $\gamma(0) = x(o) = 0$ をとり, Γ 上の任意関数 (**初期値関数**) を $\Phi(s) = (\phi^h(s))$ ($3 \leq h \leq m$) とする．このとき, 次の m 次行列式 (★) が条件

$$(\star) \quad \det(A(\gamma(0), \Lambda_2(\gamma(0)), \frac{\partial \gamma}{\partial s_1}(0), \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial s_k}(0), \dots, \frac{\partial \gamma}{\partial s_{m-1}}(0)) \neq 0$$

を満たすならば、 Γ 上で $\lambda_1(\gamma(s)) = \Psi(s)$ (s は 0 の近傍) を満たすベクトル方程式 (*) の解 λ_1 が一意に存在する. 実際, 局所座標 $x = (x^1, \dots, x^m)$ を $x(o) = 0, (E_i)_o = (\partial/\partial x^i)_o$ ($1 \leq i \leq m$) を満たすようにとり, 初期曲面 Γ を $\gamma^1(s) = s_1, \gamma^2(s) = 0, \gamma^3(s) = s_2, \dots, \gamma^m(s) = s_{m-1}$ と選ぶ. このとき, $A(0, \Lambda_2(0)) = (0, 1, 0, \dots, 0)$ だから, m 次行列式 ($\star$) $= -1 \neq 0$ を満たす. 以上の議論は, λ_1 を任意に与え, λ_2 を未知関数としても同様である.

さて, 最初の問題は, 基点 o の周りの関数 $\Theta : M \rightarrow \mathfrak{k}$ で局所線形分布 $\mathcal{D}^\Theta = \{\mathcal{D}_p^\Theta\}$, $D_p^\Theta = P_{op}(\text{Ad}(\exp \Theta(p))V_0)$, が包含的になる関数 Θ の存在であった. 方程式 (*) を未知関数 Θ の準線形 1 階偏微分方程式系に書き換えることを考える.

これまで同様に, $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ を $V_0 = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ を満たす $\mathfrak{p} = T_o M$ の**正規直交基底**とし, $x = (x^1, \dots, x^m)$ をこの基底に付随する**正規座標**とし, o の周りの局所基底場 $\{E_1, \dots, E_m\}$ を $\mathfrak{p}$ の基底 $\{e_1, \dots, e_m\}$ から定まる**平行移動場**とする. このとき $x(o) = 0, (\partial/\partial x^i)_o = e_i$ ($1 \leq i \leq m$), $[E_i, E_j]_o = 0$ ($1 \leq i, j \leq m$) を満たす. また, $\mathfrak{k}$ の**正規直交基底** $\{t_1, \dots, t_\ell\}$ をとり, それに関する座標を $y = (y^1, \dots, y^\ell)$ とする. o の周りの局所関数 Θ を $y = \Theta(x) = (y^1(x), \dots, y^\ell(x))$ と考え, また, 方程式 (*) の未知関数 $\lambda_i(x)$ を $\lambda_i(y(x))$ と見なす. このとき, 方程式 (*) は未知関数 $y = y(x)$ ($y(0) = 0$) に関する次のような準線形 1 階偏微分方程式系 (#) として書き換えられる.

$$(\#) \quad \sum_{\alpha=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m (p^h)_{\alpha}^j(x, y) \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^j} + q^h(x, y) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad (p^h)_{\alpha}^j(x, y) &= \sum_{i=1}^m \{ \lambda_1^i(y) (E_i x^j) \frac{\partial \lambda_2^h}{\partial y^{\alpha}} - \lambda_2^i(y) (E_i x^j) \frac{\partial \lambda_1^h}{\partial y^{\alpha}} \} \quad (3 \leq h \leq m), \\ q^h(x, y) &= \sum_{i,j=1}^m u_{ij}^h(x, \lambda(y)) \lambda_1^i(y) \lambda_2^j(y) + v^h(x, \lambda(y)) \end{aligned} \quad \text{と置く.}$$

定理. $s = 2$ とする. このとき, 局所線形分布 $\mathcal{D}^\Theta$ が包含的となるような基点 $o \in M$ の周りの局所関数 $\Theta : M \rightarrow \mathfrak{k}$ が存在するための必要十分条件は, 初期条件 $y(0) = 0$ で次の (1), (2) を満たす関数 $y = \Theta(x) = y(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ が存在することである:

- (1) (**微分方程式の条件**) 関数 $y = y(x)$ は準線形 1 階偏微分方程式系 (#) を満たす.
- (2) (**関数関係の条件**) さらに, $a_i^j(0) = \delta_i^j$ ($i, j = 1, 2$) を満たす $y(0) = 0 \in \mathbb{R}^\ell$ の周りの 4 つの関数 $a_i^j(y)$ で, $a_i^h(y) = \sum_{j=1,2} \lambda_j^h(y) a_i^j(y)$ ($3 \leq h \leq m$) と置くと関数関係 $\text{Ad}(\exp(\sum_{\alpha=1}^{\ell} y^{\alpha}(x) t_{\alpha})) e_i = \sum_{j=1}^m a_i^j(y(x)) e_j$ ($i = 1, 2$) を満たす.

注意. 方程式 (#) の係数 $p_{\alpha j}^h(x, y(x))$, $q^h(x, y(x))$ の $x = 0$ における値を計算すれば,

$$p_{\alpha j}^h(0, 0) = \begin{cases} 0 & (3 \leq j \leq m) \\ -\langle \text{ad}(t_{\alpha}) e_2, e_h \rangle & (j = 1) \\ \langle \text{ad}(t_{\alpha}) e_1, e_h \rangle & (j = 2) \end{cases}, \quad q^h(0, 0) = 0$$

となる.

参考文献

- [1] R. Harvey and H. B. Lawson, Calibrated geometries, *Acta Math.*, 148(1982), 47-157.
- [2] J. M. Landsberg, Minimal submanifolds defined by first-order systems of PDE, *J. Diff. Geom.*, 36(1992), 369-415.
- [3] E. B. Dynkin, Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras, *Mat. Sb.*, 30(1952), 349-462.
- [4] D. S. P. Leung, On the classification of reflective submanifolds of Riemannian symmetric spaces, *Indiana Univ. Math. J.*, 24(1974), 327-339, Errata: *ibid.*, 24(1975), 1199.
- [5] D. S. P. Leung, Reflective submanifolds. III. Congruency of isometric reflective submanifolds and corrigenda to the classification of reflective submanifolds, *J. Diff. Geom.*, 5(1971), 159-168.
- [6] M. Berger, Les espaces symétriques non compacts, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), 74(1957), 85-177.
- [7] O. Ikawa, The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions *J. Math. Soc. Japan* 63 (2011), 79-136.
- [8] R. Takagi and M. Takeuchi, Degree of symmetric Kählerian submanifolds of a complex projective space, *Osaka J. Math.*, 14(1977), 501-518.
- [9] K. Ogiue, Differential Geometry of Kaehler Submanifolds, *Adv. in Math.*, 13(1974), 73-114.
- [10] B. Y. Chen and K. Ogiue, On totally real submanifolds, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 193 (1974), 257-266.
- [11] 内藤博夫, 塚田和美, 対称空間の対称部分多様体の分類, *数学* 55(3)(2003), 42-57.
- [12] 内藤博夫, 竹内勝, 対称空間の対称部分多様体, *数学* 36(2)(1984), 137-156.
- [13] J. D. Moore, Isometric immersions of riemannian products, *J. Diff. Geom.*, 14(1979), 167-177.
- [14] D. Ferus, Symmetric submanifolds of Euclidean space, *Math. Ann.*, 247(1980), 81-93.

- [15] M. Takeuchi, Parallel submanifolds of space forms, Manifolds and Lie groups, in honor of Yozô Matsushima (J. Hano et al., eds.), Birkhäuser, Boston, 1981, 429-447.
- [16] I. Satake, Algebraic structures of Symmetric domains, Iwanami Shoten, Tokyo and Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1981.
- [17] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces of general type, J. Math. Soc. Japan, 50(1998), 557-592.
- [18] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces of exceptional type, Japan. J. Math. (N.S.), 26(1)(2000), 157-206.
- [19] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces of classical type, Japan. J. Math. (N.S.), 26(2)(2000), 219-319.
- [20] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces of classical type, Japan. J. Math. (N.S.), 26(2)(2000), 219-319.
- [21] S. Murakami, Sur la classification des algèbres de Lie réelles et simples, Osaka J. Math., 2(1965), 291-307.
- [22] H. Nakagawa and R. Takagi, On locally symmetric Kähler submanifolds in a complex projective space, J. Math. Soc. Japan, 28(1976), 638-667.
- [23] M. Kon, On some complex submanifolds in Kähler manifolds, Canad. J. Math., 26(1974), 1442-1449.
- [24] H. Naitoh and M. Takeuchi, Totally real submanifolds and symmetric bounded domains, Osaka J. Math., 19(1982), 717-731.
- [25] H. Naitoh, Parallel submanifolds of complex space forms I,II, Nagoya Math. J., 90(1983), 85-117 and 91(1983), 119-149.
- [26] K. Tsukada, Parallel submanifolds in a quaternion projective space, Osaka J. Math., 22(1985), 187-241.
- [27] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, Tohoku Math. J. (2), 36(1984), 293-314.

- [28] J. Berndt, J. H. Eschenburg, H. Naitoh, K. Tsukada, Symmetric submanifolds associated with the irreducible symmetric R-spaces, *Math. Ann.*, 332(2005), 721-737.
- [29] M. Takeuchi, Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces, *Tohoku Math. J. (2)*, 36(1984), 293-314.
- [30] W. Strübing, Symmetric submanifolds of Riemannian manifolds, *Math. Ann.*, 245(1979), 37-44.
- [31] M. Takeuchi, Parallel projective manifolds and symmetric bounded domains, *Osaka J. Math. J.*, 21(1984), 507-544.
- [32] J. Inoguchi, K. Kuwabara, H. Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional Heisenberg group, *Hokkaido Math. J.*, 34(2005), 375-391.
- [33] K. Kuwabara, Grassmann geometry on the groups of rigid motions on the Euclidean and Minkowski planes, *Tsukuba J. Math.*, 30(2006), 49-59.
- [34] J. Inoguchi, H. Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional unimodular Lie groups I,II, *Hokkaido Math. J.*, 38(2009), 375-391 and 40(2011), 411-429.
- [35] J. Inoguchi, H. Naitoh, Grassmann geometry on the 3-dimensional non-unimodular Lie groups, *Hokkaido Math. J.*, (to appear).
- [36] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Advances in Math.* 21 (1976), 293-329.
- [37] V. Patrangenaru, Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triples, *Pacific J. of Math.* 173-2 (1996), 511-532.
- [38] K. Sekigawa, On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces, *Tensor (N. S.)*, 31(1977), 87-97.
- [39] H. Naitoh, Grassmann geometries on compact symmetric spaces, in: *The Third Pacific Rim Geometry Conference (Seoul, 1996)*, *Monogr. Geom. Topology* 25, International Press, 1998, 211-222.
- [40] I. Kath and M. Olbrich, On the structure of pseudo-Riemannian symmetric spaces, *Transformation Groups*, 14-4(2009), 847-885.