

小池の条件を満たす HERMANN 作用
の極小軌道の分類について
(ON CLASSIFICATION OF MINIMAL ORBITS
OF THE HERMANN ACTION
SATISFYING KOIKE'S CONDITIONS)

大仁田 義裕 (YOSHIHIRO OHNITA)

序

G を連結コンパクトリー群とする． (G, K_1, θ_1) および (G, K_2, θ_2) を G に対する 2 個のコンパクトリーマン対称対とする．このとき，コンパクトなリーマン対称空間 $M = G/K_1$ 上への K_2 の自然な左群作用は，*Hermann* 作用と呼ばれる．

Hermann 作用は，超極性や変分完備性，無限次元超極的作用との関連性など，豊かな良い性質・構造が知られている．Hermann 作用の軌道は，法接続に関して平行な平均曲率ベクトル場をもつ等質部分多様体になる（酒井高司氏ら），等の性質をもち，部分多様体の微分幾何の観点からも大切な部分多様体のクラスを与える．とくに，Hermann 作用の主軌道は，平坦な断面をもつ等質等径部分多様体で，平行移動写像によるその逆像は，ヒルベルト空間内の固有なフレッドホルム等質等径部分多様体になることもよく知られている．この領域においても小池直之氏の貢献は大きい．

今， G は半単純で，可換条件 $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ が満たされる Hermann 作用に限定する． $\text{rank}(G/K_1)$ は $M = G/K_1$ 上での K_2 の余等質性に等しい，と仮定する．小池直之 ([10], [11]) は， M 上の Hermann 作用の軌道に関する 3 種の条件 (I_1) , (I_2) , (II_2) を与え，Hermann 作用の軌道がそれら 3 条件の内の 1 個を満たすならば，軌道上の誘導計量は， G の $(-1) \times \text{Killing-Cartan}$ 形式から誘導された計量と比例すること，3 条件の内の 1 個を満たす軌道が極小軌道である場合には，そのヤコビ微分作用素（第 2 変分作用素）は， K_2 および G/K_1 のカシミール作用素を用いてより簡易化された公式を示した．さらに，小池は，自身の条件を満たす極小軌道の例を幾つか挙げている．

本研究では，（いくらか改善された）小池の条件を満たす Hermann 作用の極小軌道を全て分類するという問題を議論し，まだ十分と言えるものではないが，その結果を述べたい．この研究は，元大阪市立大学大学院学生（修士）吉田稔氏 ([17]) との共同研究である．

1. R -空間の標準埋め込み

G を連結なコンパクトリー群， (G, K, θ) をコンパクトリーマン対称対とする．この対称対に関する G のリー代数 $\mathfrak{g}$ の標準分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$$

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 53C40; Secondary: 53C42, 53D12,
Key words and phrases: Hermann action, compact symmetric spaces, minimal orbits, minimal submanifolds. The work is partly supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.18K03307.

とする. $\mathfrak{g}$ の $\text{Ad}(G)$ と θ で不変な正定値内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を一つ取る. K の $\mathfrak{p}$ 上の等方表現 (isotropy representation) は,

$$\text{Ad}_{\mathfrak{p}} : K \ni a \mapsto \text{Ad}(a)|_{\mathfrak{p}} \in O(\mathfrak{p})$$

によって定められる. この表現は, 対称対 (G, K, θ) の s -表現と呼ばれる.

$\mathfrak{p}$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を 1 つとる. 各 $H \in \mathfrak{a}$ に対して, H における K の等方部分群を,

$$K_H := \{a \in K \mid \text{Ad}_{\mathfrak{p}}(a)H = H\}$$

とおく. このとき, K の H を通る軌道 $\text{Ad}_{\mathfrak{p}}(K)H \subset \mathfrak{p}$ (s 表現の軌道) と微分同相なコンパクト等質空間 K/K_H は R -空間と呼ばれ, そのユークリッド空間 $\mathfrak{p}$ への標準埋め込み

$$\Phi_H : K/K_H \ni aK_H \mapsto \text{Ad}_{\mathfrak{p}}(a)H \in \mathfrak{p}$$

が定義される. $H \in \mathfrak{a}$ が正則元の場合は, K/K_H は正則 R -空間と呼ばれる.

R -空間の標準埋め込み (s 表現の軌道) のもつ部分多様体としての微分幾何学的性質は, 次が基本的である.

定理 1.1 ([9]). 任意の R -空間の標準埋め込みは, 法接続に関して平行な平均曲率ベクトル場をもつ.

定理 1.2 ([12]). 任意の R -空間の標準埋め込みの法接続は, 簡約等質空間としての標準不変接続から誘導された接続と一致する.

系 1.1 ([12]). 任意の正則 R -空間の標準埋め込みの法接続は, 自明で, R -空間全体で定義された K -同変かつ法接続に関して平行な法標構の場をもつ.

さらに, 対称空間 G/K 上への K の等方作用 (*isotropy action*) は,

$$K \times G/K \ni (k, aK) \mapsto kaK \in G/K$$

によって定義される. 対称空間 G/K の測地線の指数写像

$$\exp_{eK} : \mathfrak{p} \ni X \mapsto \exp(X) \cdot eK \in G/K$$

は, K の等方表現と等方作用に関して同変であり, 指数写像のもとで s -表現の軌道は, K の G/K 上への等方作用の軌道に対応する. このとき, K の G/K 上への等方作用の軌道も, 上述の s -表現の軌道の性質と同様の性質を持つことが観察された.

後節で扱われる Hermann 作用は, コンパクト対称空間上の等方作用の拡張である.

2. 変分完備性とコンパクト対称空間上の HERMANN 作用

K を連結コンパクトリー群, M を完備リーマン多様体とする. K は, M 上に等長的に作用すると仮定する.

M 上の K の任意の軌道および任意の点 $a \in M$ に対して, (無限次元) 道空間

$$\Omega(M, N; a) := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow M \mid H^1\text{-写像}, \gamma(0) \in N, \gamma(1) = a\}.$$

およびその上のエネルギー汎関数が,

$$E : \Omega(M, N; a) \ni \gamma \mapsto \frac{1}{2} \int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2 dt \in \mathbb{R}$$

によって定義される. このエネルギー汎関数 E の臨界点 $\gamma \in \Omega(M, N; a)$ は, N に垂直に発して点 a へ結ぶ測地線 γ に他ならない. エネルギー汎関数 E の臨界点 γ におけるヘッシアン (第 2 変分形式) $(\delta^2 E)_{\gamma}$ は, (無限次元) ベクトル空間

$$\{V \in C^\infty(\gamma^{-1}TM) \mid V(0) \in T_{\gamma(0)N}, V(1) = 0\}$$

上に対称 2 次形式である.

コンパクトなリー群の等長的な作用に対する変分完備性の概念は、Bott-Samelson (1958) ([1]) によって導入された。 M 上の K の任意の軌道および任意の点 $a \in M$ に対して、エネルギー汎関数 $E\Omega(M, N; a) \rightarrow \mathbb{R}$ の各臨界点 γ におけるヘッシアン $(\delta^2 E)_\gamma$ の退化次数 (nullity) はキリング退化次数 (Killing nullity) と等しくなるとき、 M の上へのリー群 K の等長的な作用は、**変分完備性** (variational completeness) を持つと呼ばれる。 1958 年に Bott-Samelson ([1]) によって、 K の M 上への等長的な群作用は変分完備性もつと仮定するとき、もし点 $a \in M$ が正則であるならば、そのエネルギー汎関数 $E : \Omega(M, N; a) \rightarrow \mathbb{R}$ は、パーフェクトなモース関数で、そのホモロジー基底は具体的に構成されることを示された。

では、コンパクトリー群のどのような等長的な群作用が、変分完備性をもつか？は基本的な問題となるが、Robert Hermann の結果が第一に挙げられる。

G を連結コンパクトリー群とする。 (G, K_1, θ_1) と (G, K_2, θ_2) を G の二つのリーマン対称対とする。

$$K_2 \times M \ni (a, bK_1) \mapsto abK_1 \in M$$

によって $M = G/K_1$ 上への $K_2 \subset G$ の左群作用が定義される。 $K_1 = K_2$ の場合は、Hermann 作用は $M = G/K_2$ 上への $K_1 = K_2$ のイソトロピー群作用に他ならない。このとき、1960 年に Hermann は、次を示した。

定理 2.1 ([4]). この群作用は、変分完備性をもつ。

今日、この群作用は、*Hermann 作用* と呼ばれている。

その変分完備性のもとになる本質的な性質は、群作用の**超極性**という性質である。リーマン多様体上へのリー群の等長的な作用は、各軌道が垂直に交叉するような閉全測地的な部分多様体 (断面) をもつとき、**極的**であると呼ばれる。さらに、リーマン多様体上へのリー群の等長的な作用は、各軌道が垂直に交叉するような**平坦**な閉全測地的な部分多様体 (平坦断面) をもつとき、**超極的**であると呼ばれる。R. Hermann 自身によって、その超極性が示されている (1962 年)。

定理 2.2 ([5], [3] も参照). *Hermann 作用* は、超極的である。

ここで、1971 年の Conlon による次の見事な結果は言及しておかなければならない。Conlon の証明は、軌道のまわりのチューブを使う巧みな証明で感銘を受ける。

定理 2.3 ([2]). コンパクトリー群の完備リーマン多様体上への超極的な作用は、変分完備性をもつ。

また、Hermann 作用の軌道は、部分多様体のリーマン幾何学の観点からも良い性質をもっている。井川治-酒井高司-田崎博之 (2001 年) による

定理 2.4 ([8]). *Hermann 作用* の任意の軌道は、法接続に関して平行な平均曲率ベクトル場をもつ。

定理 2.5 ([8]). *Hermann 作用* の任意の軌道の法接続は、簡約等質空間としての標準不変接続から誘導された接続と一致する。

3. リー代数的設定

G をリー代数 $\mathfrak{g}$ をもつ連結半単純コンパクトリー群とする。 $\mathfrak{g}$ 上の $\text{Ad}G$ -不変内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle := -B_{\mathfrak{g}}(\cdot, \cdot)$ と定める。ここで、 $B_{\mathfrak{g}}(\cdot, \cdot)$ は $\mathfrak{g}$ の Killing-Cartan 形式を表わす。 (G, K_i, θ_i) ($i = 1, 2$) を 2 つのリーマン対称対とする。それぞれの対称リー代数としての標準分解を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{m}_2$$

とする．内積 $(\mathfrak{m}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ を使って， $M = G/K_1$ 上の G -不変リーマン計量 h を定めると， (M, h) はリーマン対称空間である． $\pi : G \rightarrow M = G/K_1$ は自然な射影を表わす．このとき， K_2 の (M, h) 上への Hermann 作用は，等長的である．

Hermann 作用は，可換条件

$$\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1.$$

を満たすと仮定する．このとき，直交直和分解

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2),$$

とその複素化

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = ((\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2))^{\mathbb{C}} \oplus ((\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1))^{\mathbb{C}},$$

がある．

さらに， $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ の極大可換部分ベクトル空間 $\mathfrak{a}$ を選ぶ．ここで， $\text{Exp}(\mathfrak{a})$ は，超極的作用としての Hermann 作用の平坦断面である（参照，[3]）．

$$\begin{aligned} \text{ad} : \mathfrak{a} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}), \\ \text{ad} : \mathfrak{a} &\rightarrow \mathfrak{gl}((\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2))^{\mathbb{C}}, \\ \text{ad} : \mathfrak{a} &\rightarrow \mathfrak{gl}((\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1))^{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

を $\mathfrak{a}$ からの 3 種のリー代数準同型写像とする．

$V = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, ((\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2))^{\mathbb{C}}$ or $((\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1))^{\mathbb{C}}$ とおく．実線型関数 $\beta : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して， V の複素ベクトル部分空間 V_β

$$V_\beta := \{X \in V \mid \text{ad}(H)(X) = \sqrt{-1}\beta(H)X \text{ for } \forall H \in \mathfrak{a}\}$$

によって定める． $V = \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\tilde{\Sigma} := \{\beta : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 実線型関数, } \beta \neq 0, V_\beta \neq 0\}.$$

と定める． $V = ((\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2))^{\mathbb{C}}$ に対して，

$$\Sigma := \{\beta : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 実線型関数, } \beta \neq 0, V_\beta \neq 0\}$$

と定める． $V = ((\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{k}_2 \cap \mathfrak{m}_1))^{\mathbb{C}}$ に対して，

$$W := \{\beta : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R} \text{ 実線型関数, } \beta \neq 0, V_\beta \neq 0\}$$

と定める．このとき， $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup W$ が成り立つ．さらに， $\mathfrak{a}^*$ の一つの基底に関して $\mathfrak{a}^*$ 上に辞書式順序を定めておく．この線型順序に関して， $\tilde{\Sigma}$ の正の元全体の集合を $\tilde{\Sigma}^+$ で表わし， $\tilde{\Sigma}$ の単純ルート系を $\tilde{\Pi}$ とし，

$$\Sigma^+ := \tilde{\Sigma}^+ \cap \Sigma,$$

$$W^+ := \tilde{\Sigma}^+ \cap W$$

とおく．今，

$$\begin{aligned} P_0 &:= \{H \in \mathfrak{a} \mid \beta(H) \in (0, \pi) \text{ for } \forall \beta \in \Sigma^+, \\ &\quad \beta(H) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ for } \forall \lambda \in W^+\}. \end{aligned}$$

と定める．

定理 3.1 (参照, [6]). M 上の *Hermann* 作用の任意の軌道は, *Weyl* 群作用を除いて唯一の元 $Z_0 \in \overline{P_0}$ が存在して,

$$N = K_2(\text{Exp}(Z_0))$$

となる.

4. 小池の条件と定理

G は半単純で, $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ で, さらに, $\text{rank}(G/K_1)$ は $M = G/K_1$ 上での K_2 の余等質性に等しいと仮定する. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は, G の Killing-Cartan 形式の (-1) 倍によって定められた $\mathfrak{g}$ の不変内積とする.

今,

$$Z_0 \in \overline{P_0}, g_0 := \exp Z_0, M = K_2 \cdot g_0 K_1 = K_2 \cdot \text{Exp}(Z_0) \subset G/K_1$$

とする. [10], [11] において, 小池直之 (東京理科大学) は, 次のような $Z_0 \in \overline{P_0}$ に関する条件 (I), (II) および (III) を導入した.

条件 (I) :

$$\begin{aligned} \Sigma^+ \cap W^+ &= \emptyset, \\ \{\beta(Z_0) \mid \beta \in \Sigma^+\} &\subset \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}, \\ \{\beta(Z_0) \mid \beta \in W^+\} &\subset \left\{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{6}\right\}. \end{aligned}$$

条件 (II) :

$$\begin{aligned} \Sigma^+ \cap W^+ &\subset \left\{\frac{\pi}{4}\right\}, \\ \{\beta(Z_0) \mid \beta \in \Sigma^+\} &\subset \left\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi\right\}, \\ \{\beta(Z_0) \mid \beta \in W^+\} &\subset \left\{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{4}\right\}. \end{aligned}$$

条件 (III) :

$$\begin{aligned} \Sigma^+ \cap W^+ &= \emptyset, \\ \{\beta(Z_0) \mid \beta \in \Sigma^+\} &\subset \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}, \\ \{\beta(Z_0) \mid \beta \in W^+\} &\subset \left\{\pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{\pi}{3}\right\}. \end{aligned}$$

注意. 条件 (I), (II) および (III) のどれかを満たされるならば, それは唯一つである. また, 条件 (II) における “ $\Sigma^+ \cap W^+ \subset \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$ ” は, [10], [11] におけるものと多少異なる. これは, 吉田稔によって少し改良されたものである.

小池は, 条件 (I), (II) および (III) のどれかを満たす Hermann 作用の軌道は次のような “良い” 性質をもつことを示した.

定理 4.1 ([10], [11]). $Z_0 \in \overline{P_0}$ に対して, $N := K_2 \cdot \text{Exp} Z_0$ とおく.

$$\text{rk}(G/K_1) = \text{cohom}(K_2 \curvearrowright M) \quad (4.1)$$

と仮定する. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ は, 条件 (I), (II) および (III) の一つを満たすならば, このとき, N 上の誘導リーマン計量 g は, $\mathfrak{g}$ の不変正定値内積 $c\langle \cdot, \cdot \rangle$ の $\mathfrak{t}_2$ への制限か

ら得られる N 上の K_2 -不変リーマン計量である：ここで、 c は、次のように与えられる：

$$c = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{(I),} \\ \frac{1}{2} & \text{(II),} \\ \frac{1}{4} & \text{(III).} \end{cases} \quad (4.2)$$

定理 4.2 ([10], [11]). $Z_0 \in \overline{P_0}$ に対して、 $N := K_2 \cdot \text{Exp} Z_0$ とおく。

$$\text{rk}(G/K_1) = \text{cohom}(K_2 \curvearrowright M) \quad (4.3)$$

と仮定する。 $Z_0 \in \overline{P_0}$ は、条件 (I), (II) および (III) の一つを満たすとする。もし $N = K_2 \text{Exp} Z_0$ が極小軌道 (M の極小部分多様体) ならば、このとき、 N のヤコビ微分作用素 $\mathfrak{J}$ は、

$$\widehat{\mathfrak{J}}(\tilde{V}) = -C_{K_2}(\tilde{V}) + C_{G/K_2} \circ \tilde{V} \quad (\forall V \in C^\infty(T^\perp N))$$

によって与えられる。ここで、線型同型

$$C^\infty(T^\perp N) \ni V \longleftrightarrow \tilde{V} \in C^\infty(K_2, T_{\text{Exp} Z_0}^\perp N)_{(K_2) \text{Exp} Z_0}$$

を使い、 C_{K_2} は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する K_2 のカシミール作用素、 C_{G/K_2} は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する対称空間 G/K_2 の等方表現のカシミール作用素を表す。

定義 4.1. 条件 (I), (II) および (III) の一つを満たす Herman 作用の軌道を、小池軌道 (*Koike orbit*) と呼び、さらに、極小部分多様体になる小池軌道を、極小小池軌道 (*minimal Koike orbit*) と呼ぶことにする。

注意. 小池軌道の上の誘導計量は、正規等質計量なので、非負の断面曲率をもつ。

極小小池軌道のいくつかの例がご自身の論文 [10], [11] において与えられている。そこで、

問題. コンパクト対称空間上への Hermann 作用の極小小池軌道を分類せよ。

5. 分類

我々の最近の共同研究 ([16]) においては、条件 (I), (II) および (III) の内の一つを満たし極小軌道に対応する全ての $Z_0 \in \overline{P_0}$ を決定する問題を研究している。

可換条件 $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ を満たすコンパクト既約対称空間上の Hermann 作用は、次のようにほぼ分類される (井川治 [6], [7], 大野晋司 [15] も参照)：

- (1) $K_1 = K_2$, Type I 対称空間の等方作用.
- (2) $K_1 = K_2$, Type II 対称空間の等方作用.
- (3) $\theta_1 \not\sim \theta_2$ (A),
- (4) $\theta_1 \not\sim \theta_2$ (B),
- (5) $\theta_1 \not\sim \theta_2$ (C).

ここで、記号 $\theta_1 \not\sim \theta_2$ は、 θ_1 と θ_2 は、 $\mathfrak{g}$ の内部自己同型写像によって互いに交換され得ることを意味する。(3), (4) および (5) の場合は、対称三対に対応することが知られている (井川治)。

5.1. $K_1 = K_2$, Type I.

定理 5.1 ([16]). *Type AI:* $G = SU(n)$, $K_1 = K_2 = SO(n)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たしかつ、極小軌道に対応するならば、このとき、 $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし、次の一つで与えられる：

- (1) $n = 3k$ ($k \geq 1$), $\alpha_k(Z_0) = \alpha_{2k}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq k, 2k$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$.

- (2) $n = 3k$ ($k \geq 1$), $l \in \mathbb{N}$ ($l + 2k \leq r$) に対して $\alpha_l(Z_0) = \alpha_{l+k}(Z_0) = \alpha_{l+2k}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq l, l+k, l+2k$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$.

それぞれの場合において、対応する軌道の次元は $3k^2$ に等しい。

定理 5.2 ([16]). *Type AIII*: $G = SU(p+q)$, $K_1 = K_2 = S(U(p) \times U(q))$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たしかつ、極小軌道に対応するならば、このとき、 $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし、次の一つで与えられる：

- (1) $p = q = 3k$, $\alpha_k(Z_0) = \alpha_{3k}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_i(Z_0) = 0$ for $i \neq k, 3k$. 対応する軌道の次元は $12k^2$ に等しい.
- (2) $p = q = 3k$, $\alpha_{2k}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_i(Z_0) = 0$ for $i \neq k, 3k$. 対応する軌道の次元は $12k^2$ に等しい.
- (3) $p + q = 3k$, $\alpha_k(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_i(Z_0) = 0$ for $i \neq k$. 対応する軌道の次元は $3k^2$ に等しい.

定理 5.3 ([16]). *Type BI*: $G = SO(p+q)$, $K_1 = K_2 = SO(p) \times SO(q)$, $k = p - q$ とおき、 $p+q$ は奇数、 $p \geq q$ とする. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たしかつ、極小軌道に対応するならば、このとき、 $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし、次の一つで与えられる：

- (1) $p + q = 3l - 1$ ($2 \leq l \leq q - 1$), $\alpha_l(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 1, q$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は $\frac{3}{2}l(l-1)$ に等しい.
- (2) $p + q = 3k + 2$, $\alpha_1(Z_0) = \alpha_q(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_i(Z_0) = 0$ for $i \neq 1, q$. 対応する軌道の次元は $\frac{3}{2}k(k+1)$ に等しい.
- (3) $p + q = 3l - 1$ ($2 \leq l \leq q - 1$), $\alpha_1(Z_0) = \alpha_l(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_i(Z_0) = 0$ for $i \neq 1, l$. 対応する軌道の次元は $\frac{3}{2}l(l-1)$ に等しい.

定理 5.4 ([16]). *Type CI*: $G = Sp(n)$, $K_1 = K_2 = U(n)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たしかつ、極小軌道に対応するならば、このとき、 $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし、次の一つで与えられる：

- (1) $n = 3l + 2$, $\alpha_{2l+1}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 2l+1$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は $3(2l+1)(l+1)$ に等しい.
- (2) $n = 3k - 1$, $\alpha_k(Z_0) = \alpha_n(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq k, n$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は $3k(2k-1)$ に等しい.

定理 5.5 ([16]). *Type CII*: $G = Sp(p+q)$, $K_1 = K_2 = Sp(p) \times Sp(q)$, $p \geq q$, $k = p - q$ とおく. このとき、条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし、かつ極小軌道に対応する $Z_0 \in \overline{P_0}$ は存在しない.

定理 5.6 ([16]). *Type DI*: $G = SO(p+q)$, $K_1 = K_2 = SO(p) \times SO(q)$, $p \geq q$ かつ $p+q$ は偶数とする. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし、かつ極小軌道に対応するならば、このとき、 $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし、次の一つで与えられる：

- (1) $p = q = 4$, $\alpha_1(Z_0) = \alpha_3(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_1(Z_0) = \alpha_4(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $\alpha_4(Z_0) = \alpha_3(Z_0) = \frac{\pi}{3}$ または $\alpha_1(Z_0) = \alpha_3(Z_0) = \alpha_4(Z_0) = \frac{\pi}{3}$. $i \neq 1, q$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 9 に等しい.
- (2) $p = q = 3l - 1$, $\alpha_l(Z_0) = \alpha_{q-1}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq l, q-1$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は $6l^2 + 3l$ に等しい.
- (3) $p = q = 3l - 1$, $\alpha_l(Z_0) = \alpha_{q-1}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq l, q-1$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は $6l^2 + 3l$ に等しい.
- (4) $p + q = 3f - 1$ ($2 \leq f \leq q$), $\alpha_f(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq f$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は $\frac{3}{2}f(f-1)$ に等しい.

- (5) $p + q = 3f - 1$ ($2 \leq f \leq q$), $\alpha_f(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq f$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は $\frac{3}{2}f(f-1)$ に等しい.

定理 5.7 ([16]). *Type EI*: $G = E_6$, $K_1 = K_2 = Sp(4)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次の一つで与えられる:

- (1) $\alpha_4(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 4$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 27 に等しい.
(2) $\alpha_1(Z_0) = \alpha_6(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 1, 6$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 24 に等しい.

定理 5.8 ([16]). *Type EII*: $G = E_6$, $K_1 = K_2 = SU(6) \cdot SU(2)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次の一つで与えられる:

- (1) $\alpha_2(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 2$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 27 に等しい.
(2) $\alpha_2(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 4$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 24 に等しい.

定理 5.9 ([16]). *Type EIII*: $G = E_6$, $K_1 = K_2 = Spin(10) \cdot U(1)$. このとき, 条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応する $Z_0 \in \overline{P_0}$ は存在しない.

定理 5.10 ([16]). *Type EIV*: $G = E_6$, $K_1 = K_2 = F_4$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次のみ与えられる: $\alpha_1(Z_0) = \alpha_2(Z_0) = \frac{\pi}{3}$. 対応する軌道の次元は 24 に等しい.

定理 5.11 ([16]). *Type EV*: $G = E_7$, $K_1 = K_2 = SU(8)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次の一つで与えられる:

- (1) $\alpha_3(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 3$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 45 に等しい.
(2) $\alpha_5(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 5$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 45 に等しい.

定理 5.12 ([16]). *Type EVI*: $G = E_7$, $K_1 = K_2 = SO(12) \cdot SU(2)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次のみ与えられる: $\alpha_2(Z_0) = \frac{\pi}{3}$ かつ $i \neq 2$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 24 に等しい.

定理 5.13 ([16]). *Type EVII*: $G = E_7$, $K_1 = K_2 = E_6 \cdot SO(2)$. このとき, 条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応する $Z_0 \in \overline{P_0}$ は存在しない.

定理 5.14 ([16]). *Type EVIII*: $G = E_8$, $K_1 = K_2 = Spin(16)$. このとき, 条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応する $Z_0 \in \overline{P_0}$ は存在しない.

定理 5.15 ([16]). *Type EIX*: $G = E_8$, $K_1 = K_2 = E_7 \cdot SU(2)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次のみ与えられる: $\alpha_2(Z_0) = \frac{\pi}{3}$ かつ $i \neq 2$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 81 に等しい.

定理 5.16 ([16]). *Type FI*: $G = F_4$, $K_1 = K_2 = Sp(3) \cdot SU(2)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次でのみ与えられる: $\alpha_2(Z_0) = \frac{\pi}{3}$ かつ $i \neq 2$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 18 に等しい.

定理 5.17 ([16]). *Type FII*: $G = F_4$, $K_1 = K_2 = Spin(9)$. このとき, 条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応する $Z_0 \in \overline{P_0}$ は存在しない.

定理 5.18 ([16]). *Type G*: $G = G_2$, $K_1 = K_2 = SO(4)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次でのみ与えられる: $\alpha_1(Z_0) = \frac{\pi}{3}$ かつ $\alpha_2(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 3 に等しい.

5.2. $K_1 = K_2$, Type II.

定理 5.19 ([16]). A_{n-1} : $U = SU(n)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次の一つで与えられる:

- (1) $n = 3k$ ($k \geq 1$), $\alpha_k(Z_0) = \alpha_{2k}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq k, 2k$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$.
- (2) $n = 3k$ ($k \geq 1$), $l \in \mathbb{N}$ ($l + 2k \leq r$) に対して $\alpha_l(Z_0) = \alpha_{l+k}(Z_0) = \alpha_{l+2k}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq l, l+k, l+2k$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$.

それぞれの場合において, 対応する軌道の次元は $3k^2$ に等しい.

定理 5.20 ([16]). B_n : $U = SO(2n+1)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次の一つで与えられる:

- (1) $2n = 3l - 2$ ($2 \leq l \leq n, l \in \mathbb{N}$), $\alpha_1(Z_0) = \alpha_l(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 1, l$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$.
- (2) $2n = 3l - 2$ ($2 \leq l \leq n, l \in \mathbb{N}$), $\alpha_l(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq l$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$.

両方の場合において, 対応する軌道の次元は $\frac{3}{2}l(l-1)$ に等しい.

定理 5.21 ([16]). *Type C_n*: $U = Sp(n)$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次の一つで与えられる:

- (1) $n = 3l + 2$, $\alpha_{2l+1}(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 2l+1$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は $3(2l+1)(l+1)$ に等しい.
- (2) $n = 3k - 1$, $\alpha_k(Z_0) = \alpha_n(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq k, n$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は $3k(2k-1)$ に等しい.

定理 5.22. *Type DIII*: $U = SO(2n)$. このとき, 条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応する $Z_0 \in \overline{P_0}$ は存在しない.

定理 5.23 ([16]). *Type E₆*: $U = E_6$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次の一つで与えられる:

- (1) $\alpha_4(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 4$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 27 に等しい.
- (2) $\alpha_1(Z_0) = \alpha_6(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 1, 6$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 24 に等しい.

定理 5.24 ([16]). *Type E₇*: $U = E_7$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし, かつ極小軌道に対応するならば, このとき, $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし, 次の一つで与えられる:

- (1) $\alpha_3(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 3$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$.
(2) $\alpha_5(Z_0) = \frac{\pi}{3}$, $i \neq 5$. に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$.

それぞれの場合において、対応する軌道の次元は 45 に等しい.

定理 5.25 ([16]). *Type E_8* : $U = E_8$. このとき、条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし、かつ極小軌道に対応する $Z_0 \in \overline{P_0}$ は存在しない.

定理 5.26 ([16]). *Type F_4* : $U = F_4$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし、かつ極小軌道に対応するならば、このとき、 $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし、次でのみ与えられる: $\alpha_2(Z_0) = \frac{\pi}{3}$ かつ $i \neq 2$ に対して $\alpha_i(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 18 に等しい.

定理 5.27 ([16]). *Type G_2* : $U = G_2$. もし $Z_0 \in \overline{P_0}$ が条件 (I), (II) および (III) の一つを満たし、かつ極小軌道に対応するならば、このとき、 $Z_0 \in \overline{P_0}$ は条件 (I) を満たし、次でのみ与えられる: $\alpha_1(Z_0) = \frac{\pi}{3}$ かつ $\alpha_2(Z_0) = 0$. 対応する軌道の次元は 3 に等しい.

5.3. $\theta_1 \not\sim \theta_2$ (A). この場合は、 G は単純かつ θ_1 と θ_2 は互いに $\mathfrak{g}$ の対合的な内部自己同型写像で、変換され得ないという仮定によって定められる. この場合は、条件 (I) あるいは (III) を満たす Hermann 作用の軌道は存在しない. 何故ならば、これは次の結果から分かる.

補題 5.1 ([6] 松木敏彦). $\theta_1 \sim \theta_2$ であるためには、 $\Sigma \cap W = \emptyset$ であることが必要十分である.

定理 5.28 ([16]). $G = SO(r+s+t)$, $K_1 = SO(r) \times SO(s+t)$, $K_2 = SO(r+s) \times SO(t)$, ($1 \leq r < t$, $s \geq 1$) の場合、条件 (II) を満たす Hermann 作用の軌道が存在するのは、 $r = 1$ の場合のみである. $s \geq 2$ ならば、Hermann 作用の極小軌道が存在するのは、 $s = t$ のときのみであり、また、 $s = 1$ ならば、 $t = 2$ のときのみである. 対応する軌道の次元は、それぞれ $2t - 2$ および 2 に等しい. さらに、それら極小軌道は、 M の *austere* 部分多様体である.

定理 5.29 ([16]). $G = SO(4r)$, $K_1 = U(2r)$, $K_2 = SO(2r) \times SO(2r)$, ($r \geq 1$) の場合、条件 (II) を満たす Hermann 作用の軌道が存在するのは、 $r = 1$ の場合のみであるが、それらの間に極小軌道は存在しない.

定理 5.30 ([16]). $G = SU(2r)$, $K_1 = S(U(r) \times U(r))$, $K_2 = SO(2r)$, ($r \geq 1$) の場合、条件 (II) を満たす Hermann 作用の軌道が存在するのは、 $r = 1$ の場合のみであるが、それらの間に極小軌道は存在しない.

定理 5.31 ([16]). $G = SU(r+s)$, $K_1 = S(U(r) \times U(s))$, $K_2 = SO(r+s)$, ($1 \leq r < s$) の場合、条件 (II) を満たす Hermann 作用の軌道が存在するのは、 $r = 1$ の場合のみである. 対応する軌道の次元は、 $2t - 2$ に等しい. さらに、この軌道は、 M の *austere* 部分多様体であり、よって極小軌道である.

定理 5.32 ([16]). $G = SU(4r)$, $K_1 = Sp(2r)$, $K_2 = S(U(2r) \times U(2r))$, ($r \geq 1$) の場合、条件 (II) を満たす Hermann 作用の軌道が存在するのは、 $r = 1$ の場合のみであるが、それらの間に極小軌道は存在しない.

定理 5.33 ([16]). $G = Sp(2r)$, $K_1 = Sp(r) \times Sp(r)$, $K_2 = U(2r)$ の場合、条件 (II) を満たす Hermann 作用の軌道が存在するのは、 $r = 1$ の場合のみである. 条件 (II) を満たす Hermann 作用の極小軌道は、3 次元であるが、それは M の *austere* 部分多様体である.

5.4. $\theta_1 \not\sim \theta_2$ (B). この場合は, 単純連結コンパクトリー群 U およびリーマン対称対 (U, K, τ) が存在して,

$$\begin{aligned} G &= U \times U, \\ K_1 &= \Delta G = \{(u, u) \mid u \in U\}, \\ \theta_1(u_1, u_2) &= (u_2, u_1), \\ K_2 &= K \times K, \\ \theta_2(u_1, u_2) &= (\tau(u_1), \tau(u_2)). \end{aligned}$$

となるという仮定によって定められる. この場合は, $V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) = 0$ という場合のみを扱えばよい. そして, 条件 (II) を満たす軌道があるならば, その対称三対のルート系は 1 次元なければならないことを観察する. このようにして,

- (1) $U = SU(n)$, $K = SO(n)$,
- (2) $U = SU(p+q)$, $K = S(U(p) \times U(q))$,
- (3) $U = SO(p+q)$, $K = SO(p) \times SO(q)$.

定理 5.34 ([16]). 条件 (II) を満たす *Hermann* 作用の極小軌道が存在するためには,

- (1) $n = 2$,
- (2) $p = q = 1$, または
- (3) $p = 2$, $q = 1$

であることが必要十分である. それらは全て, M の *austere* 部分多様体である.

5.5. $\theta_1 \not\sim \theta_2$ (C). この場合は, 単純連結コンパクトリー群 U または $U = SO(4)$ および u の双対的な外部自己同型写像が存在して,

$$\begin{aligned} G &= U \times U, \\ K_1 &= \Delta G = \{(u, u) \mid u \in U\}, \\ \theta_1(u_1, u_2) &= (u_2, u_1), \\ K_2 &= \{(u_1, u_2) \in U \times U \mid (\sigma(u_2), \sigma(u_1)) = (u_1, u_2)\}, \\ \theta_2(u_1, u_2) &= (\sigma(u_2), \sigma(u_1)) \end{aligned}$$

となるという仮定によって定められる. このとき, $\theta_1 \circ \theta_2 = \theta_2 \circ \theta_1$ である. $V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) = 0$ である場合を扱えばよい. 同様に, 条件 (II) を満たす軌道があるならば, その対称三対のルート系は 1 次元なければならないことを観察する.

定理 5.35. U が単純である場合には, 条件 (II) を満たす *Hermann* 作用の極小軌道は, 存在しない. $U = SO(4)$ かつ $K = SO(2) \times SO(2)$ の場合には, 条件 (II) を満たす全ての軌道は, *austere* 部分多様体であり, よって極小軌道である.

謝辞. このノートは, 2018 年 9 月東京理科大学森戸記念館における研究会「部分多様体とリー群作用」での私の講演に基づいています. 著者は, 東京理科大学理学部・小池直之教授にはその優れた研究会組織と部分多様体とリー群作用の研究分野へのご尽力とご貢献に感謝の意を表します.

REFERENCES

- [1] R. Bott and H. Samelson, *Applications of Morse theory to symmetric spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 564–1029.
- [2] L. Conlon, *Variational completeness and K-transversal domains*, J. Differential Geom. **5** (1971), 135–147.

- [3] E. Heintze, R. S. Palais, C. Therng and G. Thorbergsson, *Hyperpolar actions on symmetric spaces*, Geometry, Topology, Physics, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Int. Press, Cambridge, MA, 1995, pp.214–245.
- [4] R. Hermann, *Variational completeness for compact symmetric spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 544–546.
- [5] R. Hermann, *Totally geodesic orbits of groups of isometries*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **65** = Indag. Math. **24** (1962), 291–298.
- [6] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions*, J. Math. Soc. Japan **63** (2011) 79–139.
- [7] O. Ikawa, *A note on symmetric triad and Hermann action*, Differential geometry of submanifolds and its related topics, p.220–229, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2014.
- [8] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Orbits of Hermann actions*, Osaka J. Math. **38** (2001) 923–930.
- [9] Y. Kitagawa and Y. Ohnita, *On the mean curvature of R-spaces*, Math. Ann. **262** (1983), 239–243.
- [10] N. Koike, *Examples of certain kind of minimal orbits of Hermann actions*, Hokkaido Math. J. **43** (2014) 21–42.
- [11] N. Koike, *On the indices of minimal orbits of Hermann action*, Hokkaido Math. J. **44** (2015) 251–275.
- [12] Y. Ohnita, *The degrees of the standard imbeddings of R-spaces*, Tohoku Math. J. **35** (1983), 499–502.
- [13] Y. Ohnita, *On stability of minimal submanifolds in compact symmetric spaces*, Compositio Math. **64** (1987), 157–189.
- [14] Y. Ohnita, *On classification of minimal orbits of the Hermann action satisfying Koike’s conditions (joint work with Minoru Yoshida)*. Proceedings of the 21st International Workshop on Hermitian Symmetric Spaces and Submanifolds and 14th RIRCMI-OCAMI Joint Differential Geometry Workshop (Kyungpook National University in Daegu, October 11–13 in 2017), pp.1–15.
- [15] S. Ohno, *A sufficient condition for orbits of Hermann actions to be weakly reflective*, Tokyo J. Math. **39** (2016), 537–563.
- [16] Y. Ohnita and M. Yoshida, *Classification of minimal orbits of the Hermann action satisfying Koike’s conditions*, in preparation.
- [17] 吉田稔, コンパクト対称空間上の Hermann 群作用の極小軌道のヤコビ作用素について, 大阪市立大学 大学院理学研究科数物系専攻 修士論文 2016 年度.

大阪市立大学数学研究所 OSAKA CITY UNIVERSITY ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE &
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OSAKA CITY UNIVERSITY, OSAKA, 558-8585, JAPAN
E-mail address: ohnita@sci.osaka-cu.ac.jp