変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の幾何学

山本 光*

1. 変形エルミート・ヤン・ミルズ接続の定義

変形エルミート・ヤン・ミルズ接続 (dHYM 接続) の定義式自体は Mariño-Minasian-Moore-Strominger による理論物理学の論文 [6] で最初に登場した．それとほぼ同時期に Leung-Yau-Zaslow [5] によって数学者サイドからの考察も行われたされた．一言でいえば，dHYM 接続とは特殊ラグランジュ部分多様体のミラー対応物である．

まずは特殊ラグランジュ部分多様体の定義を復習しておこう．ケーラー多様体 (X^{2n}, ω) と（本稿では多様体 M^k と書いたら k は実次元を表すことにする）と X 上至るところ消えない正則 $(n,0)$-形式 Ω の組み (X, ω, Ω) を almost Calabi–Yau 多様体という．

定義 1. almost Calabi–Yau 多様体 (X^{2n}, ω, Ω) 内の部分多様体 $L \subset X$ が phese θ (実定数) の**特殊ラグランジュ部分多様体** (sLag) $\Longleftrightarrow$ 次の (0), (1), (2) を満たす．

$$(0)\ \dim_{\mathbb{R}} L = n, \quad (1)\ \omega|_L = 0, \quad (2)\ \mathrm{Im}(e^{-\sqrt{-1}\theta}\Omega)|_L = 0.$$

ここで (1) と (2) の条件は部分多様体 L の次元に関わらず意味を持つということに注意しておこう．例えば，$\dim_{\mathbb{R}} X \geq 4$ であれば，X 内の任意の 1 次元部分多様体は (1) と (2) を満たす．従って，(0) は sLag を特別なオブジェクトにするためには重要な条件である．

定義 2. $(X^\vee, \omega^\vee)$ をケーラー多様体で $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ とする．また $\mathcal{E} \to X^\vee$ を rank 1 の $\mathbb{C}$-束（正則性は仮定しない）であり，エルミート計量 h が与えられているとする．このとき $\mathcal{E}$ 上のエルミート接続 D が phese θ（実定数）の**変形エルミート・ヤン・ミルズ接続** (dHYM 接続) $\Longleftrightarrow$ 次の (1), (2) を満たす．

$$(1)\ F^{(0,2)} = 0, \quad (2)\ \mathrm{Im}(e^{-\sqrt{-1}\theta}(\omega^\vee + F)^n) = 0.$$

ここで F は D の曲率形式である．エルミートなので純虚数値の 2-from である．変形エルミート・ヤン・ミルズは deformed Hermitian–Yang–Mills の直訳である．(1) は**可積分条件**で，これにより D は $\mathcal{E}$ に正則構造を定めることになる．また定義 1 と定義 2 の (1), (2) には対応関係がある．ただし，定義 1 の (0) に対応した条件が定義 2 では欠落している．

2. Leung-Yau-Zaslow の結果の拡張

LYZ [5] の結果の拡張版を紹介する．まずは話の舞台を設定する．

定義 3. B を実 n 次元の多様体とし，$\mathcal{D} = \{\, (U_\lambda, \psi_\lambda)\, \}_{\lambda \in \Lambda}$ をその可微分構造とする．変換関数 $\psi_\lambda \circ \psi_\mu^{-1}$ が $\mathbb{R}^m \rtimes GL(\mathbb{Z}^m)$ に収まるとき $(B, \mathcal{D})$ を**トロピカル多様体**という．

B の座標は x とする．トロピカル多様体では各局所座標 U_λ 上で定義した格子束

$$\Lambda|_{U_\lambda} := \mathbb{Z}\frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \mathbb{Z}\frac{\partial}{\partial x^n}\ (\cong \mathbb{Z}^n)$$

は共通部分で貼り合い，B 上の大域的な格子束 Λ を定める．そして，$X := TB/\Lambda$ とすれば，これで B 上のトーラス束 $\pi : X \to B$ が定まる．ファイバーであるトーラスの座標は y とする．また，同様にして，T^*B を $\Lambda^* := \mathbb{Z}dx^1 + \cdots + \mathbb{Z}dx^n$ で割って $X^\vee := T^*B/\Lambda^*$ とすれば別のトーラス束 $\pi^\vee : X^\vee \to B$ が定まる．こちらのファイバーであるトーラスの座標は $\tilde{y}$ とする．X と $X^\vee$ を**双対トーラス束**という．

1 章の定義では X と $X^\vee$ に計量が入っていた．そのため，まずは B にリーマン計量 g が備わっていることを仮定する．さらに，その g は各 U_λ 上で，ある $K_\lambda \in C^\infty(U_\lambda)$ を用いて $g|_{U_\lambda} = \sum_{i,j=1}^n (K_\lambda)_{ij} dx^i \otimes dx^j$

* 東京理科大学理学部第一部数学科
e-mail: hyamamoto@rs.ac.jp

と表されることを仮定しよう．$(K_\lambda)_{ij}$ は K_λ のヘッシアンである．このような g を**ヘッシアン計量**という．ここまで仮定すると，X と $X^\vee$ に以下のようにしてケーラー多様体の構造が入る．

$$X: \quad (\text{複素座標})\ z^i := x^i + \sqrt{-1}y^i, \quad (\text{計量})\ \omega := \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(K_\lambda)_{ij}dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

$$X^\vee: \quad (\text{複素座標})\ \tilde{z}_i := \tilde{x}_i + \sqrt{-1}\tilde{y}_i, \quad (\text{計量})\ \omega^\vee := \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(K_\lambda)^{ij}d\tilde{z}_i \wedge d\bar{\tilde{z}}_j$$

ここで $\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(x) = \frac{\partial K_\lambda}{\partial x^i}(x)$ は**ルジャンドル変換**によって定義される B 上の別の座標である．また $\Omega := dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^1$ は X 上至る所消えない大域的な正則 $(n,0)$-form を定める．(同様のことは $X^\vee$ 上でも成り立つが，$X^\vee$ 上ではそれを後で使わないので必要ない．)

定義 4. 部分多様体 $V \subset B$ が U_λ 内で座標 $\tilde{x}_i (= \frac{\partial K_\lambda}{\partial x^i})$ に関して有理的なアファイン部分空間として書けるとき**有理的アファイン部分多様体**と呼ぶ．

B 自体と，0 次元部分多様体は自明な有理的アファイン部分多様体である．さて，有理的アファイン部分多様体 $V^k \subset B$ を 1 つ取る．さらに V 上の滑らかなベクトル場 $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ を一つ取る．すると

$$L(V,Y) := T^\perp V/\Lambda + Y \ (= \{\, [\nu + Y(x)] \mid \nu \in T^\perp_x V,\, x \in V \,\})$$

は X 内の実 n 次元部分多様体になる．より詳しくは V^k 上の T^{n-k}-束になる．

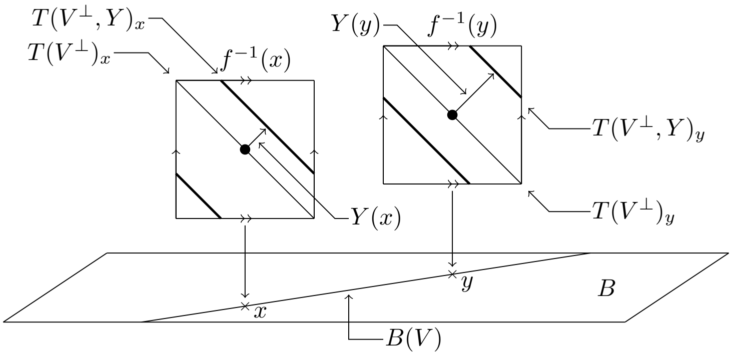

図 1: $L(V,Y)$

一方で，

$$C(V) := T^*V/\Lambda^*, \quad D^Y := d + \sqrt{-1}\sum_{j=1}^{m} Y_j d\tilde{y}_j\big|_{C(V)}$$

と定めると $C(V)$ は $X^\vee$ 内の複素 k 次元部分多様体となる．従って $X^\vee$ のケーラー構造を制限することで $C(V)$ は複素 k 次元ケーラー多様体になる．$C(V)$ は V^k 上の T^k-束である．また D^Y は $C(V)$ 上の自明 $\mathbb{C}$-束のエルミート接続になる．D^Y は $X^\vee$ 全体上ではなく，$C(V)$ という複素部分多様体上の接続であることに注意しておく．上記の設定の下，以下が成立する．

定理 5 (Y., 2018, [7])**.**
(1) $L(V,Y)$ はラグランジュ部分多様体 $\Longleftrightarrow$ $C(V)$ 上の接続 D^Y は可積分．
(2) $L(V,Y)$ は phase θ の sLag $\Longleftrightarrow$ $C(V)$ 上の接続 D^Y は phase θ の dHYM.

注意 1. B を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$V := B$ とすれば LYZ の結果 [5] が再現される．その場合 $C(V) = X^\vee$ となる．しかし，上記のように一般に D^Y は $X^\vee$ 全体で定義されるとは限らない．

どうして D^Y を $d + \sqrt{-1}Y_j d\tilde{y}_j$ と定義するのかを説明しておこう．簡単のため，状況は LYZ と同じものとする．つまり $V := B$ とし，Y は B 上のベクトル場（より正確には $Y \in \Gamma(B,X)$）という場合である．すると Y のグラフ $L = L(Y) := \mathrm{Graph}(Y) = \{\, (x, Y(x)) \in X \mid x \in B \,\}$ は X 内の半分次元の部分多

様体になるわけだが，この部分多様体に対して**フーリエ向井変換**という操作を施すことができる．すると$X^\vee$上の接続ができる．これを説明したい．まず一点$x \in B$を固定して考えよう．すると$Y(x) \in T(x)$が決まる．$T(x)$はトーラスなので自然な同型

$$T(x) \cong \mathrm{Hom}(\ \pi_1(T^*(x))\ ,\ U(1)\ )$$

がある．これは以下のようにすれば感覚的に理解できる．まずπ_1を忘れれば，$T^*(x)$を考える時点で双対を一回とっている．さらに$T^*(x)$から$U(1)$への準同型写像全体を考えるわけだから，右辺は情報としては$T(x)$の双対の双対のようなものである．従ってそれが元の$T(x)$と同型であることは容易に想像できるであろう．さて今$Y(x) \in T(x)$があるので，上記の同型を介して$Y(x)$は準同型写像$Y(x) : \pi_1(T^*(x)) \to U(1)$と思うことができる．ここで以下の事実を思い出そう．ベクトル束の幾何学では基本的な事実である．

事実 6. 多様体Mに対して表現$\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$があると，$M$上のベクトル束$F$とその平坦接続$A$の組ができる．

この構成方法を$Y(x) : \pi_1(T^*(x)) \to U(1)$に対して適用すると，$F$は$T^*(x)$上の自明$\mathbb{C}$-束になり，$A$は接続$d + iY^j(x)d\tilde{y}_j$になることが確かめられる．あとは，このfiberwiseな構成で，$x \in B$をB全体で動かせば，$X^\vee$上の接続$D^Y := d + iY^j d\tilde{y}_j$ができる．この$D^Y$を$L(Y)$のフーリエ向井変換という．

3. dHYM計量の存在問題

dHYM接続の定義は，ケーラー多様体(X, ω)とその上の複素$\mathbb{C}$-束$\mathcal{E}$とそのエルミート計量hを固定したうえで,「$\mathcal{E}$のエルミートかつ可積分な接続Dで(3)を満たすもの」として定義された．その結果としてDは$\mathcal{E}$に正則構造を定める．しかしJacob-Yau [4]やCollins-Yacob-Yau [1]やCollins-Xie-Yau [2]では定義が以下のようにして,「エルミート計量」に対するものにすり替わっている．つまり，$\mathcal{E}$は最初から正則線束であると仮定しておいて，その上で$\mathcal{E}$のエルミート計量hがdHYMかどうか？を議論するわけである．その定義はhの定める標準接続がdHYM接続になることである．そのようなhをdHYM「接続」ではなくて**dHYM「計量」**と呼んで，両者を区別しよう．なお，以下ではミラー対称性の議論は登場しないので，dHYMの方で使っていた$(X^\vee, \omega^\vee)$というケーラー多様体の記号をやめて，(X, ω)を使うことにする．また，ラグランジュ部分多様体も登場しないので正則線束は$\mathcal{L}$で表すことにする．

定義 7. (X^{2n}, ω)をケーラー多様体，$\mathcal{L} \to X$を正則線束とする．このとき，$\mathcal{L}$上のエルミート計量hがphese θの**変形エルミート・ヤン・ミルズ計量**$\iff$ hの定める$\mathcal{L}$上の標準接続Dの曲率2-形式$F := -\frac{1}{2}\partial\bar{\partial}\log(h)$が

$$\mathrm{Im}\left(e^{-\sqrt{-1}\theta}(\omega - F)^n\right) = 0$$

を満たす．

定義2ではケーラー計量とFの和を考えていたが，定義7では差を考えることにしている．これはLYZより後に書かれた(Yauが著者に入る)論文でのdHYM計量の定義に合わせたためである．実際は$\mathcal{L}^{-1}$を考えれば，和と差は入れ替わるので，どちらの定義を採用しても本質的な差異は生じない．以下では定義7を採用して話を進める．

さて，ラグランジュ部分多様体にラグランジュアングルという概念があったように，エルミート計量にも**エルミートアングル**$\theta : X \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$を$\theta := \arg\zeta$で定義しよう．ここで$\zeta : X \to \mathbb{C}^*$は

$$\frac{(\omega - F)^n}{n!} = \zeta\frac{\omega^n}{n!}$$

で定義されている．θが$\mathbb{R}$-値関数にリフトしているときhは**グレイデッド**ということにする．また，hに対してその**平均曲率形式**を$H := d\theta$で定義する．すると，hが（あるphaseに対して）dHYM計量であることと，エルミートアングルθが定数であることと，$H \equiv 0$は同値であることはすぐに分かる．以下ではXはコンパクトとし，体積は1に正規化されているとしよう．$\dim_{\mathbb{C}} X = 2$の場合はJacob-Yau [4]によって，dHYM計量の存在と$\mathcal{L}$の性質に関して，以下のような結果が得られている．

定理 8 ([4]). (X^4,ω) をケーラー多様体（つまりケーラー曲面），$\mathcal{L}\to X$ を正則線束とする．このとき，$\mathcal{L}$ が条件 (P) を満たすことと，$\mathcal{L}$ 上に dHYM 計量が存在することは同値である．

ここで $\mathcal{L}$ が条件 (P)（ある種の Positivity 条件とも思えるはずなので P という記号を使うことにした）を満たすとは，次の (1), (2) を満たす $\mathcal{L}$ 上のエルミート計量 h が存在することである．

(1) h はグレイデッドかつ $\theta\in(0,\pi)$ である．

(2) $\Omega:=\cot(\hat{\theta})\omega+\sqrt{-1}F$ は正定数値 $(1,1)$-形式になる．

ここで $\hat{\theta}$ は定数で $\hat{\theta}:=\arg\left(\int_X(\omega-F)^2/2\right)\in(0,\pi)$ と定義されている．

(証明の概要)
h が dHYM ならば，その h が $\mathcal{L}$ の条件 (P) を満たすものになる．一方で，$\mathcal{L}$ が (P) を満たすと仮定すると，(1) と (2) を満たす h がある．関数 $f\in C^\infty(X)$ を

$$f:=\log\left(\frac{(1+\cot^2(\hat{\theta}))\det\omega}{\det\Omega}\right)$$

と定める．すると次が言える：

$$\left(\Omega+\frac{\sqrt{-1}}{2}\partial\bar{\partial}\phi\right)^2=e^f\Omega^2 \tag{1}$$

を満たす $\phi\in C^\infty(X)$ があれば，$h':=e^{-\phi}h$ が dHYM 計量になる．この事実を示すときに $\dim_{\mathbb{C}}X=2$ を使う．すると X にケーラー計量を Ω で入れて（条件 (2) より Ω はケーラー計量である），ケーラー多様体 (X,Ω) を考えて，この上で上記のモンジュアンペール方程式 (1) を解けば良い．f が可解条件 $\int_X e^f\Omega^2=\int_X\Omega^2$ を満たすことは直接計算で示すことができる．従って ϕ の存在，つまり dHYM 計量の存在が言える．□

2 章から 3 章に移るときに議論の対象が dHYM「接続」から dHYM「計量」にすり替わった．そして最後は dHYM「形式」に議論の対象をすり変える．つまり以下の問を考える．

問題 1. (X^{2n},ω) をケーラー多様体，$\mathcal{L}\to X$ を正則線束とする．このとき，代表元 $\alpha\in c_1(\mathcal{L})$ であって

$$\arg\left(\frac{(\omega+\sqrt{-1}\alpha)^n}{\omega^n}\right)=\theta\,:\,\mathrm{const}$$

を満たすものは存在するか？

存在する場合，そのような α を phase θ の **dHYM「形式」** と呼ぶことにしよう．$\dim_{\mathbb{C}}X=3$ の場合は Collins-Xie-Yau [2] によって，dHYM 形式の存在に関する障害が見つかっている．

定理 9 ([2]). (X^6,ω) をコンパクトケーラー多様体, $\mathcal{L}\to X$ を正則線束とする．このとき，$c_1(\mathcal{L})$ 内に phase $\theta\in(\pi,\pi+\frac{\pi}{2})$ の dHYM 形式が存在するならば，次の 3 次のチャーン数まで使う不等式が成り立たなければならない：

$$\left(\int_X\omega^3\right)\left(\int_X ch_3(\mathcal{L})\right)<3\left(\int_X ch_2(\mathcal{L})\wedge\omega\right)\left(\int_X ch_1(\mathcal{L})\wedge\omega^2\right).$$

ここでチャーン数の定義は $ch_n(\mathcal{L}):=c_1(\mathcal{L})^n/n!$ である．

実際は $\theta\in(\pi-\frac{\pi}{2},\pi]$ の場合も成り立つようであるが，筆者には証明がわからない．

(証明の概要)
$\dim_{\mathbb{C}}X=3$ の場合「α が phase θ の dHYM 形式である」という式は

$$\tan\theta(\omega^3-3\alpha^2\wedge\omega)=3\alpha\wedge\omega^2-\alpha^3 \tag{2}$$

となる，という特殊事情に着目する．ここでαをωに関して対角化したときの固有値を$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$とし，$\sigma_1:=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$, $\sigma_2:=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1$, $\sigma_3:=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$とおくと,「$\alpha$がphase θのdHYM形式である」という式はさらに

$$2\sigma_1+\tan\theta(2\sigma_2-1)=\sigma_3$$

と書ける．ここで$\theta\in(\pi,\pi+\frac{\pi}{2})$を使うと$\lambda_i>0$が言えるので$\sigma_3<\frac{1}{3}\sigma_1\sigma_2$がでる．この不等式と上記の等式を合わせた式から$\tan\theta<2\sigma_1$が言える．この式の両辺に$\omega^3$を掛けて，$2\sigma_1\omega^3=3\alpha\wedge\omega^2$に注意して，積分すると

$$\tan\theta\int_X\omega^3<3\int_X\alpha\wedge\omega^2$$

を得る．最後に式(2)をX上で積分して得られる式を用いて上記の不等式の$\tan\theta$を消去すると欲しい不等式が得られる．□

4. エルミート計量の部分多様体論的アナロジー

この章ではエルミート計量に対して部分多様体論の各概念のアナロジーを導入する試みを紹介する．(X,g)は複素次元nのケーラー多様体とし，ケーラー計量は

$$\omega=\frac{\sqrt{-1}}{2}g_{\bar{k}j}dz^j\wedge d\bar{z}^k$$

と書けていることとする．また$\pi:\mathcal{L}\to X$を正則線束とする．$\mathcal{L}$上のエルミート計量hに対して, その曲率2-形式$F=F(h)$は局所的には$F=\frac{1}{2}F_{\bar{k}j}dz^j\wedge d\bar{z}^k:=-\frac{1}{2}\partial_j\partial_{\bar{k}}\log(h)dz^j\wedge d\bar{z}^k$ で与えられることに注意する．hの定める**誘導計量** ηを$\eta_{\bar{k}j}:=g_{\bar{k}j}+F_{\bar{k}\ell}g^{\ell\bar{m}}F_{\bar{m}j}$ と定義する．これはX上の正定値$(1,1)$-形式になる．また∇Fをhの**第二基本形式**と呼ぶことにする．誘導計量ηを使って，$C^\infty(X)$に作用する楕円型作用素Δ_ηを

$$\Delta_\eta f:=\eta^{j\bar{k}}\partial_j\partial_{\bar{k}}f$$

で定める．さらにhの**体積** $V(h)$を

$$V(h):=\int_X|\zeta|\frac{\omega^n}{n!}$$

で定義する．このとき体積汎関数の第一変分公式は以下になる．

命題 1 ([4])**.** (X,ω)上の任意の滑らかなエルミート計量の1パラメーター族$h_t=e^{-\phi(t)}h_0$で$\operatorname{supp}\phi(t)$がコンパクトになるようなものに対して

$$\frac{d}{dt}V(h_t)=-\int_X\langle\bar{\partial}\dot{\phi},H^{(1,0)}\rangle_\eta|\zeta|\frac{\omega^n}{n!}=\int_X(L_\eta\theta)\dot{\phi}|\zeta|\frac{\omega^n}{n!},$$

が成り立つ．ここで$L_\eta f:=\Delta_\eta f-\langle K^*(\bar{\partial}f),\partial f\rangle_\eta$であり，$K$は$T^{1,0}X$の自己準同型写像で$K:=g^{j\bar{k}}F_{\bar{k}\ell}\frac{\partial}{\partial z^j}\otimes dz^\ell$ と定義されている．

命題1からhが体積汎関数の臨界点であることとエルミートアングル$\theta:X\to\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$が$L_\eta\theta=0$を満たすことは同値であることが分かる．特に$h$がdHYM計量ならば$\theta$は定数であるから，体積汎関数の臨界点である．しかし，それ以上に，dHYM計量は体積汎関数の最小値を与えることが分かる．

定理 10 ([4])**.** hがdHYM計量ならば，$\mathcal{L}$上の任意のエルミート計量h'に対して$V(h')\geq V(h)$である．

(証明の概要)

hをdHYMとする．するとhのエルミートアングルは定数である．その値をθ_0とする．任意のエルミート計量h'に対して

$$\Psi(h'):=\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta_0}\frac{(\omega-F(h'))^n}{n!}\right)$$

という最高次の微分形式を対応させることにする．またh'に対して決まる関数$\kappa=\kappa(h'):X\to\mathbb{R}$を$\Psi(h')=\kappa(h')\times|\zeta(h')|\frac{\omega^n}{n!}$と定義する．この時以下の2つの事実が成立する．

事実1: $\kappa(h')\leq1$かつ等記成立はh'がdHYMのときに限る．

事実 2. $\Psi(h_1)-\Psi(h_2)=$“exact form” と書ける．
すると任意の h' に対して

$$V(h')\geq\int_X\Psi(h')=\int_X\Psi(h)=V(h)$$

となり，証明が完了する．最初の不等号では事実 1，中央の等号では事実 2，最後の等号では事実 1 を使った．□

上記の証明は「特殊ラグランジュ部分多様体がそのホモロジー類の中で体積最小」ということを示すときに使うキャリブレイテッド幾何学の基本的な議論の流れと同様である．従って，dHYM 計量には変分構造があり，dHYM 計量は上記の体積汎関数の最小値を与える．

さて次に，部分多様体に対する発散定理のアナロジーを導出しよう．X 上の新し体積要素 $d\mu(h)$ を $d\mu(h)=|\zeta|\frac{\omega^n}{n!}$ で定義する．記号の簡略化のため $v:=|\zeta|:X\to\mathbb{R}^+$ とおく．$T^{1,0}X$ の滑らかな切断 $Y=Y^i\frac{\partial}{\partial z^i}$ に対して，その v-**重み付き発散**を $\operatorname{div}_v Y:=v^{-1}\nabla_i\left(vY^i\right)$ で定義する．すると，もし Y のサポートがコンパクトならば，$d\mu(h)$ の定義と通常の発散定理によって

$$\int_X\operatorname{div}_v Y d\mu(h)=0$$

となることが分かる．

次にエルミート計量 $h=e^{-\phi}h_0$ の “接束” という概念を定義しよう．まず U を X の局所チャートとし $(z_1,\dots,z_n)$ を U 上の正則座標とする．このとき $i=1,\dots,n$ に対して

$$\mathcal{E}_i:=\frac{\partial}{\partial z^i}\oplus\frac{\partial^2\phi}{\partial z^i\partial\bar{z}^j}d\bar{z}^j=\frac{\partial}{\partial z^i}\oplus\bar{\partial}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z^i}\right)$$

で定義される $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ の U 上の切断を考える．すると $\{\mathcal{E}_i\}_{i=1}^n$ は $\mathbb{C}$ 上一次独立な $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ の U 上の切断になる．さて U' を $U\cap U'\neq\emptyset$ となる別の局所チャートとし $(w_1,\dots,w_n)$ をその正則座標とする．ここで

$$\mathcal{E}'_j:=\frac{\partial}{\partial w^j}\oplus\bar{\partial}\left(\frac{\partial\phi}{\partial w^j}\right)$$

と定義すると，$U\cap U'$ 上で $\mathcal{E}_i=\frac{\partial w^j}{\partial z^i}\mathcal{E}'_j$ となるので，$\mathcal{E}_i$ と $\mathcal{E}'_j$ の変換関数は正則であるということが分かる．従って以下の定義が意味を持つ．

定義 11. $\mathcal{L}$ 上のエルミート計量 $h=e^{-\phi}h_0$ に対して $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ 内の階数 n の正則部分束 Th を

$$Th|_U:=\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{\,\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_n\,\}$$

で定義し，これを h の**接束**と呼ぶことにする．

注意 2. Th の定義は，グラフで書けるような $\mathbb{C}^n$ 内のラグランジュ部分多様体 L の接束 TL の定義の類似である．より正確には $\psi=\psi(x)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな関数とし，ラグランジュ部分多様体 $L=\{\,(x,\nabla\psi(x))\mid x\in\mathbb{R}^n\,\}$ を考える．このとき TL は

$$\frac{\partial}{\partial x^i}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^j},\quad i=1,\dots,n$$

で張られる．Th の定義はこの類似である．

Th の変換関数は $\partial w^j/\partial z^i$ であるから，Th は正則ベクトル束として $T^{1,0}X$ と同型である．実際，同型写像は $\mathcal{E}_i\mapsto\frac{\partial}{\partial z^i}$ で与えらる．この同型写像を $\widetilde{\bullet}:Th\to T^{1,0}X$ と書くことにする．$\mathcal{Y}=Y^j\frac{\partial}{\partial z^j}\oplus Y_{\bar{j}}d\bar{z}^j$ と $\mathcal{Z}=Z^k\frac{\partial}{\partial z^k}\oplus Z_{\bar{k}}d\bar{z}^k$ を $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ の滑らかな切断とする．このとき $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ のエルミート計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を

$$\langle\overline{\mathcal{Y}},\mathcal{Z}\rangle:=g_{\bar{j}k}\overline{Y^j}Z^k+g^{j\bar{k}}\overline{Y_{\bar{j}}}Z_{\bar{k}}$$

で定義する．この計量に関する $Th\subset T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ の直交補空間を $T^\perp h$ と書き，h の**法束**と呼ぶことにする．さらに，$\mathcal{Y}$ の Th 成分（$T^\perp h$ 成分）を $\mathcal{Y}^\top$ ($\mathcal{Y}^\perp$) と書き，これを h に関する $\mathcal{Y}$ の**接部分**（**法部分**）と呼ぶことにする．さらに $\widetilde{\mathcal{Y}^\top}$ を $\mathcal{Y}$ **に付随する** $(1,0)$ **型ベクトル場**と呼ぶことにする．

定義 12. $\mathcal{Y}=Y^j\frac{\partial}{\partial z^j}\oplus Y_{\bar{j}}d\bar{z}^j$ を $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ の滑らかな切断とする．このとき $\mathcal{Y}$ の h に沿った発散を

$$\operatorname{div}_h\mathcal{Y}:=\nabla_iY^k\eta^{i\bar{j}}g_{\bar{j}k}+\nabla_iY_{\bar{k}}\eta^{i\bar{j}}F_{\bar{j}\ell}g^{\ell\bar{k}}$$

で定義する．$\operatorname{div}_h\mathcal{Y}$ は X 上の滑らかな関数になる．

定義 13. $\mathcal{L}$ 上のエルミート計量 $h=e^{-\phi}h_0$ に対して，その平均曲率切断というものを

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}(\omega,h):=\left(-g^{q\bar{k}}H_{\bar{p}}\eta^{\ell\bar{p}}F_{\bar{k}\ell}\frac{\partial}{\partial z^q}\right)\oplus\left(g_{\bar{q}k}H_{\bar{\ell}}\eta^{k\bar{\ell}}d\bar{z}^q\right)$$

で定義する．これは $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ の滑らかな切断である．このように定義すると $\mathcal{H}^\top=0$ となる．

定理 14. $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ の切断 $\mathcal{Y}$ に対して $\operatorname{div}_v\widetilde{\mathcal{Y}}^\top=\operatorname{div}_h\mathcal{Y}+\langle\overline{\mathcal{H}},\mathcal{Y}\rangle$ が成り立つ．さらに $\mathcal{Y}$ のサポートがコンパクトならば

$$\int_X\operatorname{div}_h\mathcal{Y}d\mu(h)=-\int_X\langle\overline{\mathcal{H}},\mathcal{Y}\rangle d\mu(h)\tag{3}$$

が成り立つ．

注意 3. 定理 14 は通常の部分多様体論で登場する発散定理（第一変分公式）の類似である．実際，リーマン多様体 $(M,\langle\,,\,\rangle)$ とその中の部分多様体 L と L に沿った TM の切断 V でサポートがコンパクトなものが与えられたときに

$$\int_L\operatorname{div}_LVd\mu_L=-\int_L\langle H,V\rangle d\mu_L,$$

が成り立つ．ここで div_L は V の L に沿った発散で，H は L の平均曲率ベクトルで，$d\mu_L$ は L に誘導された測度である．

以下で発散定理 (3) の応用を 1 つ与える．そのために以下のような特殊な状況を考える．

定義 15. 点 $p\in X$ を固定する．以下の条件を満たす p の開近傍 U が存在するとき，(X,g) は p の近傍で局所準平坦ということにする．

(i) U は $B\times T^n$ に微分同相である．ここで B は $\mathbb{R}^n$ の原点を中心とした開球で $T^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ は n 次元トーラスである．なお B の座標は $(x^1,\dots,x^n)$，T^n の座標は $(y^1,\dots,y^n)$ を使うことにする．

(ii) $B\times T^n$ 上の複素座標 $z^i:=x^i+\sqrt{-1}y^i$ と U 上の元々の複素座標は両立する．

(iii) $(z^1,\dots,z^n)$ 座標で書いたときに U 上で全ての $i,j,k\in\{1,\dots,n\}$ に対して $g_{\bar{i}j}=g_{\bar{j}i}$ と $\frac{\partial}{\partial y^k}g_{\bar{i}j}=0$ が成り立つ．

$(U,(z^1,\dots,z^n))$ を p の周りの局所準平坦座標と呼ぶことにする．(iii) の 2 つ目の条件から $g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial y^j}\right)=0$ が出る．

定義 16. $(U,(z^1,\dots,z^n))$ を p の周りの局所準平坦座標とする．$h=e^{-\phi}h_0$ が U 上で全ての k に対して $\frac{\partial}{\partial y^k}\phi=0$ を満たすとき，h は p の周りでグラフ的と言うことにする．

Leung-Yau-Zaslow で登場するケーラー多様体 (X,ω) とエルミート計量 h は全ての点で局所準平坦かつグラフ的である．

定義 17. ある点 $p\in X$ の周りで (X,g) は局所準平坦で h はグラフ的であるとする．p の周りの局所準平坦座標を $(U,(z^1,\dots,z^n))$ とする．このとき U 上の $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ の切断を

$$\mathcal{P}:=\left(2x^k\frac{\partial}{\partial z^k}\right)\oplus\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\phi}{\partial x^k}d\bar{z}^k\right)$$

で定義し，これを p を中心とする h の位置切断と呼ぶことにする．

定義 18. X 上の滑らかな複素数値関数 $f:X\to\mathbb{C}$ に対して作用する微分作用素 $\mathcal{D}$ を

$$\mathcal{D}f:=\left(\nabla_{\bar{i}}f\eta^{j\bar{i}}\frac{\partial}{\partial z^j}\right)\oplus\left(\nabla_{\bar{i}}f\eta^{\bar{i}j}F_{\bar{\ell}j}d\bar{z}^\ell\right)$$

で定義する．$\mathcal{D}f$ は $T^{1,0}X\oplus\Lambda^{0,1}X$ の滑らかな切断になる．

$f\varphi\mathcal{P}$ に対して発散定理(3)を適用すると以下を得る．

定理 19. ある点 $p \in X$ の周りで (X, g) は局所準平坦で h はグラフ的であるとする．p の周りの局所準平坦座標を $(U, (z^1, \ldots, z^n))$ とする．このときサポートが U に含まれるような任意の滑らかな関数 $f : X \to \mathbb{R}$ と定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して以下が成立する．

$$\int_X \left(n + \langle \overline{\mathcal{H}}, \mathcal{P}\rangle + 2\alpha \left|\mathcal{P}^\top\right|^2\right) f\varphi d\mu(h) = -\int_X \langle \overline{\mathcal{D}f}, \mathcal{P}\rangle \varphi d\mu(h). \tag{4}$$

ここで $\varphi := \exp(\alpha|\mathcal{P}|^2) : U \to \mathbb{R}$ と定めている．

5. flow approach

特殊ラグランジュ部分多様体を見つけるために，**ラグランジュ平均曲率流**を使うというのは近年ではメジャーな方法である．つまり，勝手なラグランジュ部分多様体を1つ取って，それを平均曲率流で変形し（ambient が Calabi–Yau など良い多様体ならばラグランジュ性は保たれる）時間無限大まで解が存在しその極限が存在すれば，それは特殊ラグランジュ部分多様体になるというストーリーである．Jacob-Yau はこのミラー対応物を考えた．つまり，エルミート計量のしかるべき発展方程式を考え，その極限として，dHYM 計量を見つけようという作戦である．その発展方程式を彼らは line bundle mean curvature flow （直訳：線束平均曲率流）と呼んだ．

定義 20. (X, ω) をケーラー多様体，$\mathcal{L} \to X$ を正則線束とする．$h(t) := e^{-\phi(t)} h_0$ を $\mathcal{L}$ のエルミート計量の1パラメーター族とする．これが

$$\frac{\partial}{\partial t} d\phi(t) = H(t)$$

を満たすとき，$h(t)$ を**線束平均曲率流**という．

線束平均曲率流 $h(t)$ に沿って体積 $V(h(t))$ は減少する．また線束平均曲率流の定常解（つまり $\frac{\partial}{\partial t} d\phi(t) = 0$ を満たす解）は dHYM 計量である ($H = 0$ なので)．従って線束平均曲率流は良い発展方程式であろうことが期待される．実際，部分多様体に対する通常の平均曲率流に対して成り立つ性質の類似物が成り立つことも証明された．

定理 21 (Jacob-Yau, [4])**.** (X, ω) をコンパクトケーラー多様体, $\mathcal{L} \to X$ を正則線束とする．$h(t)$ を $[0, T)$ 上の線束平均曲率流 ($T \in (0, \infty]$) とする．このとき $\sup_{t\in[0,T)} |\nabla F_t| \leq C_0$ ならば $\sup_{t\in[0,T)} |\nabla^k F_t| \leq {}^\exists C_k$ $(k \geq 1)$ が言える．

このことから次の2つが従う

(1) $h(t)$ が存在する限界の時刻 T がもし有限値ならば，$\limsup_{t\to T} |\nabla F_t| = \infty$ である．

(2) $h(t)$ が $[0, \infty)$ 上存在し，$\sup_{t\in[0,\infty)} |\nabla F_t| \leq C_0$ ならば時刻の部分列 $\exists t_i$ を取って $h(t_i)$ をある dHYM 計量 h_∞ に収束させることができる．

(1) はいわゆる有限時間爆発というケースである．ラグランジュ平均曲率流の場合はそれが起きる．しかし，線束平均曲率流で有限時間爆発をする例は今のところ知られていない．というのも，このフロー自体が新しすぎて（非自明な）具体例は一つも与えられていない．そこで次を問題として残してしておこう．

問題 2. 有限時間爆発する線束平均曲率流の例を構成せよ．

現状では本当に有限時間爆発する線束平均曲率流の解が存在するのかは不明だが，有限時間爆発も起こりうると仮定して，先に進むことにしよう．平均曲率流の場合，有限時間爆発した時の解の漸近挙動は Huisken の単調性公式 [3] を使うことで (Type I なら) 特定できた．したがって，線束平均曲率流に対しても単調性公式を見つけておけば，有限時間爆発した時の解析に有用であろう．

(X^{2n}, ω) をケーラー多様体とし $\pi : \mathcal{L} \to X$ を正則線束とする．$h(t) = e^{-\phi(t)} h_0$ を線束平均曲率流とし，定義されている時間は $t \in [0, T)$ とする. 時空の点 $Q = (p, T') \in X \times (0, T]$ を一つ固定し，(X, g) は p の近傍で局所準平坦であり，$h(t)$（$t \in [0, T')$）はグラフ的であることを仮定する．

$r_0 > 0$ を

$$B^x(0, 2r_0) \times T^n := \{\, z = x + \sqrt{-1}y \in \mathbb{C}^n \mid |x| < 2r_0, y \in T^n \,\}$$

の閉包が U に含まれるように小さくとる．$\tilde{f} : \mathbb{R} \to [0,1]$ を滑らかな cut-off function で $[1,2]$ 上で狭義単調増加で

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad x \in (-\infty, 1] \\ 0 & \text{if} \quad x \in [2, \infty) \end{cases} \qquad \text{and} \quad |\tilde{f}'| + |\tilde{f}''| \le C'$$

を満たすものとする（$C' > 0$ 定数）．$\mu = \mu(g) > 0$ を $B^x(0, 2r_0) \times T^n$ の閉包上での $(g_{\bar{i}j})$ の最小固有値の最小値の $1/2$ 乗とする．関数 $f : U \times [0, T') \to \mathbb{R}$ を

$$f(z,t) := \tilde{f}\left(\frac{|\mathcal{P}(z,t)|}{2\mu r_0}\right)$$

で定義する．詳細は省略するが事実として $f(\,\cdot\,, t)$ のサポートは任意の $t \in [0, T')$ に対して常に $B^x(0, 2r_0) \times T^n$ に含まれてる．ここで $[0, T')$ 上の関数を

$$\Theta(h, Q, t) := \int_X \frac{1}{(4\pi(T'-t))^{n/2}} \exp\left(-\frac{|\mathcal{P}(t)|^2}{4(T'-t)}\right) \tilde{f}\left(\frac{|\mathcal{P}(t)|}{2\mu r_0}\right) d\mu(h(t))$$

と定義する．$d\mu(h(t)) := \zeta(t)\frac{\omega^n}{n!}$ である．このとき以下が成り立つ．

定理 22 (Y., in preparation)**.** ある定数 $C > 0$ が存在して

$$\frac{d}{dt}\Theta(h, Q, t) \le -\int_X \left|\mathcal{H} + \frac{\mathcal{P}^\perp}{2(T'-t)}\right|^2 f\varphi d\mu(h(t)) + C$$

となる．C はより厳密には次元 n にしか依存しない定数 $C''(n) > 0$ を用いて

$$C = C'C''(n)\frac{\mathrm{Vol}(h(0))}{\mu^{n+2} r_0^{n+2}}$$

と書ける．

この定理の証明中で (4) を使う．この定理によって $\Theta(h, Q, t) + C(T'-t)$ は非負かつ広義単調減少であることが分かる．従って $t \to T'$ のとき，その極限が存在する．第二項は $t \to T'$ のときにゼロに収束するので，結局は $\lim_{t \to T'} \Theta(h, Q, t)$ が存在することが分かる．これは通常の部分多様体に対する平均曲率流の**ガウス密度**のある種の対応物と思えるはずである．現在はこの量を用いた線束平均曲率流の ε-正則性定理について研究中である．

参考文献

[1] T. C. Collins, A. Jacob and S.-T. Yau. (1,1) forms with specified Lagrangian phase: a priori estimates and algebraic obstructions. arXive:1508.01934, 2015.

[2] T. C. Collins, D. Xie and S.-T. Yau. The deformed Hermitian-Yang-Mills equation in geometry and physics. arXive:1712.00893, 2017.

[3] G. Huisken. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. *J. Differential Geom.*, 31 (1990), no. 1, 285–299.

[4] A. Jacob and S.-T. Yau. A special Lagrangian type equation for holomorphic line bundle. *Math. Ann.* 369 (2017), no. 1-2, 869–898.

[5] N.-C. Leung, S.-T. Yau and E. Zaslow. From special Lagrangian to Hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform. *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** (2000), no. 6, 1319–1341.

[6] M. Mariño, R. Minasian, G. Moore and A. Strominger. Nonlinear instantons from supersymmetric p-branes. *J. High Energy Phys.* 2000, no. 1, Paper 5, 32 pp.

[7] H. Yamamoto. Special Lagrangian and deformed Hermitian Yang-Mills on tropical manifold. to appear in *Math. Z.*