

卒研説明会 (小池研究室)

2014 年 1 月 25 日

目次

- ① ゼミを行う曜日および時間帯 & 使用する教科書等
- ② ゼミで研究する内容
- ③ 平均曲率流・リッチ流の研究へと・・・
(リッチ流は3次元ポアンカレ予想の証明に用いられた)

1. ゼミを行う曜日および時間帯
& 使用する教科書等

ゼミを行う曜日および時間帯 & 使用する教科書等

ゼミを行う曜日および時間帯

金曜日 14:30~17:30

教科書

幾何学的変分問題 (西川青季著, 岩波書店)

第1,2章 曲線のエネルギーと第1,2変分公式

第3章 写像のエネルギーと第1,2変分公式

第4章 熱流の方法による(自由ホモトピー類内での)
調和写像の存在性証明

ゼミを行う曜日および時間帯 & 使用する教科書等

ゼミの進め方

毎週、1人か2人の方に発表をしてもらいます。
前後期、各々、2度、簡単な試験(30分程度)を行います。

2. ゼミで研究する内容

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

$\Omega_{\text{p.s.}}(M; p, q)$: リーマン多様体 (M, g) 上の点 p から q への区分的に C^∞ 級の $([0, 1]$ を定義域とする) 曲線の全体

定義

$$L : \Omega_{\text{p.s.}}(M; p, q) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} L(c) := \int_0^1 \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt \quad (c \in \Omega_{\text{p.s.}}(M; p, q))$$

$$E : \Omega_{\text{p.s.}}(M; p, q) \rightarrow \mathbb{R}$$

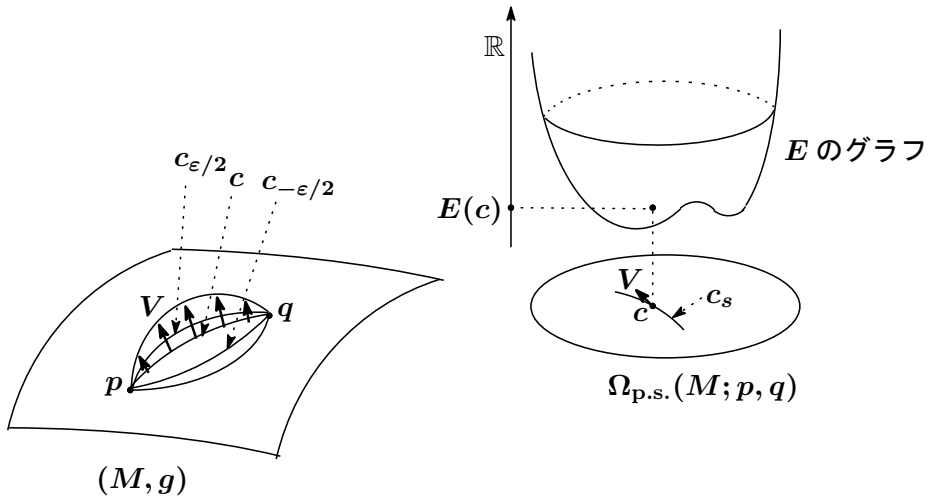
$$\stackrel{\text{def}}{\iff} E(c) := \int_0^1 g(c'(t), c'(t)) dt \quad (c \in \Omega_{\text{p.s.}}(M; p, q))$$

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

$c \in \Omega_{p.s.}(M; p, q)$ を固定する。

$c_s (-\varepsilon < s < \varepsilon) : c_0 = c$ となる $\Omega_{p.s.}(M; p, q)$ 上の
 C^∞ 級の曲線

曲線のエネルギーと第1,2変分公式



曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

c が滑らかであるとする。

L の第 1 変分公式

$$dL_c(V) = \left. \frac{dL(c_s)}{ds} \right|_{s=0} = - \frac{1}{L(c_0)} \int_0^1 g((\nabla_{c'} c')_t, V_t) dt$$
$$\left(V := \left. \frac{dc_s}{ds} \right|_{s=0} \right)$$

E の第 1 変分公式

$$dE_c(V) = \left. \frac{dE(c_s)}{ds} \right|_{s=0} = - \int_0^1 g((\nabla_{c'} c')_t, V_t) dt$$
$$\left(V := \left. \frac{dc_s}{ds} \right|_{s=0} \right)$$

曲線のエネルギーと第1,2変分公式

注意

$\Omega_{\text{p.s.}}(M; p, q)$: 無限次元フレシェ多様体

$E : \Omega_{\text{p.s.}}(M; p, q) \longrightarrow \mathbb{R}$

$dE_c : T_c \Omega_{\text{p.s.}}(M; p, q) \longrightarrow T_{E(c)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

定義

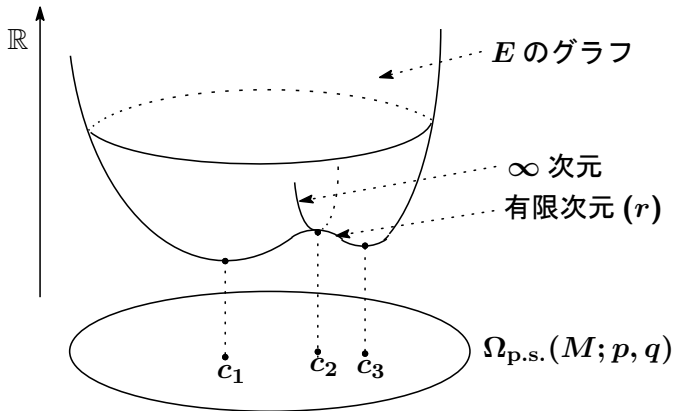
$$c : L \text{ の臨界点} \stackrel{\text{def}}{\iff} \left. \frac{dL(c_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0 \quad (\forall c_s \text{ s.t. } c_0 = c)$$

$$c : E \text{ の臨界点} \stackrel{\text{def}}{\iff} \left. \frac{dE(c_s)}{ds} \right|_{s=0} = 0 \quad (\forall c_s \text{ s.t. } c_0 = c)$$

定理

$$c : L \text{ の臨界点} \iff c : E \text{ の臨界点} \iff \nabla_{c'} c' = 0$$

(c : 測地線)



c_1, c_2, c_3 : E の臨界点 (つまり、測地線)

r は臨界点 c_2 の指数とよばれる。

臨界点 c_1, c_2 の指数は 0 である。

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

c が測地線であるとする。

E の第 2 変分公式

$$\begin{aligned}
 (\nabla dE)_c(V, V) &= \left. \frac{d^2 E(c_s)}{ds^2} \right|_{s=0} \\
 &= - \int_0^1 g \left(\frac{D^2 V}{dt^2} + R(V, c')c', V \right) dt \\
 &\quad \left(V := \left. \frac{dc_s}{ds} \right|_{s=0} \right)
 \end{aligned}$$

($R : (M, g)$ の曲率テンソル場)

曲線のエネルギーと第 1,2 変分公式

$\mathcal{X}_c(M)$: c に沿うベクトル場の全体

$$J_c : \mathcal{X}_c(M) \rightarrow \mathcal{X}_c(M)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} J_c(V) := \frac{D^2 V}{dt^2} + R(V, c')c' \quad (V \in \mathcal{X}_c(M))$$

この作用素 J_c は、測地線 c におけるヤコビ作用素とよばれる。
 J_c を調べることにより、 E の臨界点 c における指数を調べることができる。

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

(M, g) : コンパクトリーマン多様体

(N, \tilde{g}) : リーマン多様体

$C^\infty(M, N)$: M から N への C^∞ 写像の全体
(これは、無限次元フレシェ多様体)

定義

$$E : C^\infty(M, N) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} E(f) := \int_{p \in M} \|df_p\|_{g_p, \tilde{g}_{f(p)}}^2 dv_g \quad (f \in C^\infty(M, N))$$

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

$f \in C^\infty(M, N)$ を固定する。

$f_s (-\varepsilon < s < \varepsilon) : f_0 = f$ となる $C^\infty(M, N)$ 上の
 C^∞ 級の曲線

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

f が滑らかであるとする。

E の第 1 変分公式

$$dE_f(V) = \frac{dE(f_s)}{ds} \Big|_{s=0} = - \int_M g(\tau(f), V) dV_g$$

$$\left(V := \frac{df_s}{ds} \Big|_{s=0} \right)$$

注意 $\tau(f)$ は、 $\tau(f) := \Delta_g f$ によって定義される f に沿うベクトル場で、 f の **テンション場** とよばれるものである。

特に、 f が等長はめ込みのとき、 f の **平均曲率ベクトル場** と一致する。

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

注意

$$E : C^\infty(M, N) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$dE_f : T_f C^\infty(M, N) \longrightarrow T_{E(f)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

定理

$f : E$ の臨界点 $\iff \tau(f) = 0$ (つまり、 f : 調和写像)

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

f が調和写像であるとする。

E の第 2 変分公式

$$\begin{aligned} (\nabla dE)_f(V, V) &= \frac{d^2 E(f_s)}{ds^2} \Big|_{s=0} \\ &= - \int_M g \left(\Delta_g V + \text{Tr}_g \tilde{R}(V, df) df, V \right) dv_g \\ &\quad \left(V := \frac{df_s}{ds} \Big|_{s=0} \right) \end{aligned}$$

($\tilde{R} : (N, \tilde{g})$ の曲率テンソル場)

写像のエネルギーと第 1,2 変分公式

$\mathcal{X}_f(M, N) : f$ に沿うベクトル場の全体

$$J_f : \mathcal{X}_f(M, N) \rightarrow \mathcal{X}_f(M, N)$$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} J_f(V) := \Delta_g V + \text{Tr}_g \tilde{R}(V, df)df \quad (V \in \mathcal{X}_f(M, N))$$

この作用素 J_f は、調和写像 f におけるヤコビ作用素とよばれる。
 J_f を調べることにより、 E の臨界点 f における指数を調べることができる。

熱流の方法による自由ホモトピー類内での調和写像の存在性証明

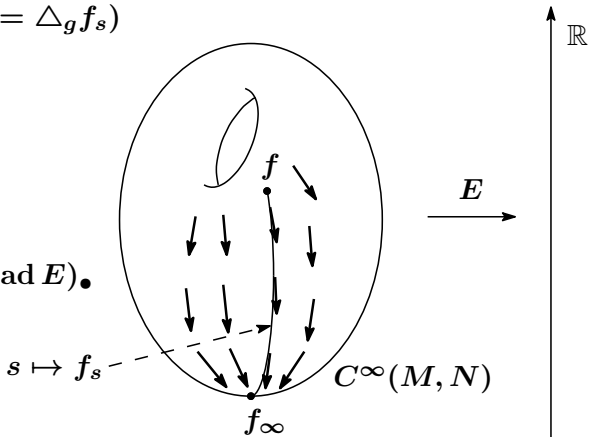
定理 (Eells-Sampson)

(M, g) をコンパクトリーマン多様体, (N, \tilde{g}) を非正曲率をもつリーマン多様体とする。このとき、各 $f \in C^\infty(M, N)$ に対し、 f と自由ホモトープな調和写像が存在する。

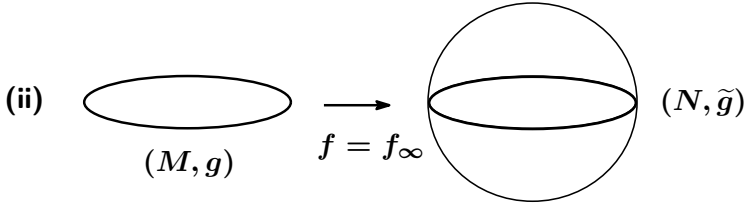
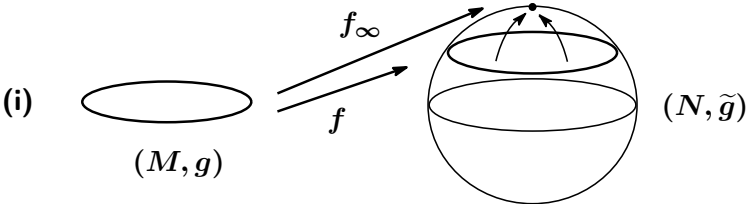
証明方法 無限次元多様体上のモース理論を参考に、**熱流の方法 (heat flow method)** とよばれる方法を用いて示される。

$$\begin{cases} \frac{\partial f_s}{\partial s} = \tau(f_s) (= \Delta_g f_s) \\ f_0 = f \end{cases}$$

$$\tau(\bullet) = -(\text{grad } E)\bullet$$



熱流の方法による自由ホモトピー類内での調和写像の存在性証明



熱流の方法による自由ホモトピー類内での調和写像の存在性証明

熱方程式

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta_g f_t$$

は、非線形放物型偏微分方程式であり、任意の滑らかな初期データに対し、短時間における解の一意存在性が示される。

平均曲率流

大学院進学希望者のために、発展的内容について紹介します。

M : m 次元コンパクト多様体

(N, \tilde{g}) : $n(> m)$ 次元リーマン多様体

$\text{Imm}^\infty(M, N)$: M から N への C^∞ はめ込みの全体

f_t ($0 \leq t < T$) : $\text{Imm}^\infty(M, N)$ 上の C^∞ 級の曲線

$$(1) \quad \frac{\partial f_t}{\partial t} = H_t$$

$(H_t : f_t$ の平均曲率ベクトル場) が成り立つとき、

f_t ($0 \leq t < T$) を **平均曲率流** とよぶ。

平均曲率流

注意

(N, \tilde{g}) がユークリッド空間のとき、 $H_t = \Delta_{g_t} f_t$ ($g_t := f_t^* \tilde{g}$)
 となり、それゆえ、(1) は、

$$\frac{\partial f_t}{\partial t} = \Delta_{g_t} f_t$$

となる。これは、非線形放物型偏微分方程式であり、任意の滑らかな初期データに対し、短時間における解の一意存在性が示される。

リッチ流

M : コンパクト多様体

$\mathcal{R}\mathcal{M}^\infty(M)$: M の C^∞ リーマン計量の全体

g_t ($0 \leq t < T$) : $\mathcal{R}\mathcal{M}^\infty(M)$ 上の C^∞ 級の曲線

$$(2) \quad \frac{\partial g_t}{\partial t} = \text{Ric}_t$$

(Ric_t : g_t のリッチテンソル) が成り立つとき、 g_t ($0 \leq t < T$) をリッチ流とよぶ。

リッチ流

3次元ポアンカレ予想は、リッチ流を用いて次のように証明された。

Σ^3 を3次元ホモトピー球面とする。

Σ^3 のリーマン計量 g を任意にとり、 $g_0 = g$ とするリッチ流 g_t を考える。

g_t は、有限時間 (これを T とする) で爆発をしてしまう。

爆発をする寸前に手術をする。

そして、その手術をして得られるリーマン計量を g_1 とする。

リッチ流

g_1 を発するリッチ流 $(g_1)_t$ を考える。

$(g_1)_t$ は、再び有限時間 (これを T_1 とする) で爆発をしてしまう。

爆発をする寸前に、再び手術をする。

そして、その手術をして得られるリーマン計量を g_2 とする。

この操作を有限回繰り返すことにより、良いリーマン計量に到達する。

Σ^3 がその良いリーマン計量を許容することから、3次元球面 S^3 と同相であることが示される。