Smoothing effect for complex Ginzburg-Landau type equations with p-Laplacian

横田 智巳 （東京理大・理）

日本数学会年会 実函数論分科会

2010.3.26

1. 序

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$: 有界領域, $\partial\Omega$: Ωの境界

次の初期値境界値問題について考える:

$$
(\mathrm{CGL})^{p}_{q,r}\quad
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta_p u + \kappa |u|^{q-2}u + i\beta |u|^{r-2}u - \gamma u = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\
u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\
u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega.
\end{cases}
$$

ここで $\lambda > 0$, $\kappa > 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $p \geq 2$, $q > r \geq 2$,

$u := u(x,t) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$, $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

Smoothing effect for $(\mathrm{CGL})^{p}_{q,q}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta_p u + (\kappa + i\beta)|u|^{q-2}u - \gamma u = 0$$

- $\frac{|\alpha|}{\lambda} \leq \frac{2\sqrt{p-1}}{p-2}\ (p \geq 2),\quad \frac{|\beta|}{\kappa} \leq \frac{2\sqrt{q-1}}{q-2}\ (q \geq 2)$

$\Rightarrow$ Liskevich-Perelmuterの不等式利用(単調性の方法)

— Okazawa-Y. (2002)

- $p = 2,\quad 2 \leq q \leq c(N)$

$\Rightarrow$ Gagliardo-Nirenbergの不等式利用

— Okazawa-Y. (2004〜), Kobayashi-Matsumoto-Tanaka (2007), Matsumoto-Tanaka (2008)

非線形Schrödinger方程式

$$(\mathrm{NLS})_r \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - i\alpha\Delta u + i\beta|u|^{r-2}u = 0$$

$$\Downarrow$$

$$(\mathrm{NLS})_{q,r} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - i\alpha\Delta u + \kappa|u|^{q-2}u + i\beta|u|^{r-2}u = 0$$

Fibich (2001)

Passot-C.Sulem-P.L.Sulem (2005)

Ohta-Todorova (2009)

$$\Downarrow$$

$$(\mathrm{CGL})^2_{q,r} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta u + \kappa|u|^{q-2}u + i\beta|u|^{r-2}u - \gamma u = 0$$

前回(昨年秋)

$p = 2$, $q > r$

$\Rightarrow$ $(\mathrm{CGL})^{2}_{q,r}$ に対する smoothing effect がいえる:

$u_0 \in L^2(\Omega)$ に対して大域的強解が一意的に存在する.

"劣微分作用素を用いて $(\mathrm{CGL})^{2}_{q,r}$ に適用可能な抽象定理を準備"

本講演の目的

$(\mathrm{CGL})^{p}_{q,r}$ に適用可能な抽象定理を準備

$\Rightarrow$ $(\mathrm{CGL})^{p}_{q,r}$ に対する smoothing effect がいえる.

2. 主結果

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\Delta_p u + \kappa |u|^{q-2}u + i\beta |u|^{r-2}u - \gamma u = 0$$

定義. $u(\cdot) \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$ は次の3条件を満たすとき, $(\mathrm{CGL})^p_{q,r}$ の**大域的強解**であるという:

(a) $u(t) \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega) \cap L^{2(r-1)}(\Omega)$,

$\Delta_p u(t) \in L^2(\Omega)$, $t > 0$;

(b) $u(\cdot) \in AC_{\mathrm{loc}}((0,\infty); L^2(\Omega))$,

従って $u(\cdot)$ は $(0,\infty)$ 上ほとんど至るところ強微分可能;

(c) $u(\cdot)$ は $(0,\infty)$ 上ほとんど至るところ $(\mathrm{CGL})^p_{q,r}$ の方程式と初期条件を満たす.

定理 (smoothing effect for $(\mathrm{CGL})^p_{q,r}$).

$\frac{|\alpha|}{\lambda} \le \frac{2\sqrt{p-1}}{p-2}$ $(p \ge 2)$, $q > r \ge 2$ $\Rightarrow$ $\forall u_0 \in L^2(\Omega)$

$\exists!\, u(\cdot) \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$: $(\mathrm{CGL})^p_{q,r}$の大域的強解.

さらに, 次が成立する:

$$u(\cdot) \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(0,\infty; L^2(\Omega)),$$

$$u(\cdot) \in C^{0,1/p}_{\mathrm{loc}}(0,\infty; W^{1,p}_0(\Omega)) \cap C^{0,1/q}_{\mathrm{loc}}(0,\infty; L^q(\Omega)),$$

$$\Delta_p u(\cdot), |u(\cdot)|^{q-2}u(\cdot), \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(0,\infty; L^2(\Omega)),$$

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^2} \le e^{(\gamma + C|\beta|)t}\|u_0 - v_0\|_{L^2} \quad (t \ge 0).$$

※$r = q$の場合に必要だった条件 $\frac{|\beta|}{\kappa} \le \frac{2\sqrt{q-1}}{q-2}$ は不要となる.

3. 証明の要点

複素Hilbert空間Hにおける抽象Cauchy問題

$$
\text{(ACP)} \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + (\lambda + i\alpha)\partial\varphi(u) + \kappa\,\partial\psi^1(u) + i\beta\,\partial\psi^2(u) - \gamma u = 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}
$$

$\lambda > 0,\ \kappa > 0,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$

$\varphi,\ \psi^1,\ \psi^2 : H \to [0, \infty]$ proper l.s.c. convex

$\Rightarrow$ $(\mathrm{CGL})^p_{q,r}$ に適用可能な(ACP)に対する抽象定理を準備する.

Conditions for φ, ψ^1, ψ^2

(A1) $\exists\, p \geq 2$ such that $\varphi(\zeta u) = |\zeta|^p \varphi(u),\ \ u \in D(\varphi),\ \mathrm{Re}\,\zeta > 0.$

(A2) $\exists\, q \geq 2$ such that $\psi^1(\zeta u) = |\zeta|^q \psi^1(u),\ \ u \in D(\psi^1),\ \mathrm{Re}\,\zeta > 0.$

(A3) $\exists\, r \geq 2$ such that $\psi^2(\zeta u) = |\zeta|^r \psi^2(u),\ \ u \in D(\psi^2),\ \mathrm{Re}\,\zeta > 0.$

(A4) $\exists\, c_p > 0\ \ \forall\, u, v \in D(\partial\varphi);$

$$|\mathrm{Im}(\partial\varphi(u) - \partial\varphi(v), u - v)| \leq c_p\, \mathrm{Re}(\partial\varphi(u) - \partial\varphi(v), u - v).$$

(A5) $\forall\, \eta > 0\ \exists\, C_\eta > 0\ \ \forall\, u, v \in D(\partial\psi^1)\ \ \forall\, \varepsilon > 0;$

$$|\mathrm{Im}(\partial\psi^2_\varepsilon(u) - \partial\psi^2_\varepsilon(v), u - v)| \leq \eta\, \mathrm{Re}(\partial\psi^1(u) - \partial\psi^1(v), u - v) + C_\eta \|u - v\|^2.$$

(A6) $\forall\, \eta > 0\ \exists\, C_\eta > 0\ \ \forall\, u \in D(\partial\varphi) \cap D(\partial\psi^1)\ \ \forall\, \varepsilon > 0;$

$$|\mathrm{Im}(\partial\varphi(u), \partial\psi^2_\varepsilon(u))| \leq \eta\, \mathrm{Re}(\partial\varphi(u), \partial\psi^1(u)) + C_\eta \varphi(u).$$

(A7) $\exists\, C_1 > 0\ \exists\, \sigma, \tau > 0\ (\sigma + \tau = 1)\ \forall\, u, v \in D(\partial\psi^2)\ \forall\, \nu, \mu > 0;$

$$|\mathrm{Im}(\partial\psi^2_\nu(u) - \partial\psi^2_\mu(u), v)| \le C_1|\nu - \mu|(\sigma\|\partial\psi^2(u)\|^2 + \tau\|\partial\psi^2(v)\|^2)$$

(A8) $(\partial\psi^1(u), \partial\psi^2_\varepsilon(u)) \in \mathbb{R}$ for $u \in D(\partial\psi^1)$ and $\varepsilon > 0.$

(A9) $D(\partial\psi^1) \subset D(\partial\psi^2)$ and $\exists\, C_2 > 0;$

$$\|\partial\psi^2(u)\| \le C_2(\|u\| + \|\partial\psi^1(u)\|), \quad u \in D(\partial\psi^1).$$

Abstract Theorem.

Let $\dfrac{|\alpha|}{\lambda} \le \dfrac{1}{c_p}$. Let (A1)–(A9) be satisfied.

$\Rightarrow$

$\forall\, u_0 \in \overline{D(\partial\varphi) \cap D(\partial\psi^1)}\ \ \exists!\, u(\cdot) \in C([0,\infty); H)$:

strong solution to (ACP) such that

$$u(\cdot) \in C^{0,1}_{\text{loc}}((0,\infty); H),$$

$$\frac{du}{dt}(\cdot), \partial\varphi(u(\cdot)), \partial\psi^1(u(\cdot)), \partial\psi^2(u(\cdot)) \in L^\infty_{\text{loc}}(0,\infty; H),$$

$$\varphi(u(\cdot)), \psi^1(u(\cdot)), \psi^2(u(\cdot)) \in AC_{\text{loc}}(0,\infty),$$

$$\|u(t) - v(t)\| \le e^{(\gamma + C_\eta|\beta|)t}\|u_0 - v_0\| \quad \forall\, t \ge 0.$$

4. 条件の確認

補題1. $q > r \geq 2,\ z,\ w \in \mathbb{C},\ \varepsilon \geq 0,$

$$z_\varepsilon + \varepsilon |z_\varepsilon|^{r-2} z_\varepsilon = z,\ \ w_\varepsilon + \varepsilon |w_\varepsilon|^{r-2} w_\varepsilon = w,$$

$$I_{s,\varepsilon}(z, w) := (|z_\varepsilon|^{s-2} z_\varepsilon - |w_\varepsilon|^{s-2} w_\varepsilon)\overline{(z - w)}$$

$\Longrightarrow \forall \eta > 0\ \exists C_\eta > 0;$

$$|\mathrm{Im}\, I_{r,\varepsilon}(z, w)| \leq \eta\, \mathrm{Re}\, I_{q,0}(z, w) + C_\eta |z - w|^2.$$

補題2. $p \geq 2,\ q > r \geq 2,\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{2(q-1)}(\Omega)$

$\Longrightarrow \forall \eta > 0\ \exists C_\eta > 0;\quad (u_\varepsilon + \varepsilon |u_\varepsilon|^{r-2} u_\varepsilon = u,\ \ \varepsilon > 0)$

$$|\mathrm{Im}\, (-\Delta_p u, |u_\varepsilon|^{r-2} u_\varepsilon)| \leq \eta\, \mathrm{Re}\, (-\Delta_p u, |u|^{q-2} u) + C_\eta \|\nabla u\|_{L^p}^p.$$